COURS 9

Version du 19 février 2025.

Rappel. Nous avons démontré le théorème suivant, le "théorème fondamental des treillis distributifs finis."

Théorème 2.7.2. *Un treillis fini est distributif si et seulement si il est isomorphe à l'ensemble des parties inférieurs d'un poset, ordonné par inclusion.*

2.8. **Pavage par dominos.** J'ai trouvé un très bel exemple d'un treillis distributif que je veux vous présenter.

Fixons un ensemble de carrés 1×1 dans la plan (avec leurs coins sur des points du réseau $\mathbb{Z}^2$. On veut considérer l'ensemble (possiblement vide) des façons de couvrir cette ensemble de carrés par des dominos 1×2.

Nous allons voir que si cet ensemble est non vide, il a naturellement la structure d'un treillis distributif. Je trouve cela intéressant en soi-même, mais il y aura aussi une application à l'échantillonage, où on veut choisir un élément uniformément de l'ensemble des pavages.

Les idées sur lesquelles est basée cette section remontent à des articles de Conway et Lagarias, et de William Thurston ("Conway's tiling groups", American Math Monthly, 1990). Je vais suivre l'article "The lattice structure on the set of domino tilings of a polygon" de Eric Rémila.

On suppose qu'on commence avec une figure F qui est un ensemble fini de carrés 1×1 dans le plan, avec leurs coins sur le réseau $\mathbb{Z}^2$. Nous supposons que l'intérieur de F est connexe (donc par rapport aux pavages, F n'est pas composé de deux régions indépendantes), et que $\mathbb{R}^2 \setminus F$ est également connexe (ce qui veut dire que F n'a pas de "trous").

On dira que deux éléments de $\mathbb{Z}^2$ sont voisins s'ils sont aux deux bouts d'un segment de longueur 1. $v \in \mathbb{Z}^2$ a donc quatre voisins.

Un chemin est une suite de sommets $(v_0, v_1, \ldots, v_p)$ telle que v_{i+1} est un voisin de v_i pour tout i.

Colorons les carrés de F en échiquier. Dirigeons les arêtes de telle sorte qu'on suit la flèche si on procède avec un carré blanc à gauche. Disons que $\Delta h(v, w) = 1$ dans ce cas, et $\Delta h(v, w) = -1$ dans l'autre cas.

Pour un chemin $c = (v_0, v_1, \ldots, v_p)$, définissons $\Delta h(c) = \Delta h(v_0, v_1) + \Delta h(v_1, v_2) + \ldots$. Nous appelerons $\Delta h(c)$ son changement d'hauteur.

Soit T un pavage. On dira qu'un chemin c est autorisé si les sommets de c sont dans F, et c ne coupe jamais un domino.

Lemme 2.8.1. *Soit T un pavage de F. Pour c, c' deux chemins autorisés de v vers w, on a $\Delta h(c) = \Delta h(c')$.*

Démonstration. Il suffit de démontrer que pour n'importe quel cycle autorisé qui ne répète pas de sommets, la somme est nulle. La démonstration se fait par récurrence. Si le cycle ne contient qu'un seul domino, on vérifie directement que ça marche. Sinon, on peut diviser la région entourée par le cycle en deux par un chemin autorisé. (Comme nous avons vu dans le cours, ce n'est peut-être pas totalement évident. Commençons avec un arête qui sépare deux dominos. Allant dans un premier temps vers le nord-ouest, on n'est jamais bloqué avant d'arriver au bord, et de façon similaire, on peut aller vers le sud-est pour, encore arriver au bord. On a maintenant dessiné une courbe qui divise F en deux, avec les deux parties non vides.) Par récurrence, les cycles autour de ces deux régions ont une somme nulle, et il en découle que la même chose est vrai pour le cycle de départ. (Remarquons que lorsqu'on prend la somme des deux cycles plus petits, la contribution du chemin diviseur va dans deux sens opposés, et donc s'annul.) $\square$

Fixons un sommet v_0 sur le bord de F. Soit T un pavage. La fonction hauteur de T, notée h_T, est définie par $h_T(w) = \Delta h(v_0, w)$.

Remarquons que la fonction hauteur est fixée sur le bord, car on peut la calculer en utilisant le chemin (autorisé !) suivant le bord.

Il y a une autre façon de comprendre la fonction hauteur, en dessinant des courbes de niveau. La meilleure façon de faire cela (je crois) est de dessiner les courbes de niveau pour les hauteurs dans $\mathbb{Z} + \frac{1}{2}$. (On verra le domino comme une surface dans $\mathbb{R}^3$.)

Lemme 2.8.2. *Soient T, U deux pavages. Si $h_T(v) = h_U(v)$ pour tout v, alors $T = U$.*

Démonstration. Soient v, w deux sommets adjacents, avec $e(v, w) = 1$. Alors il y a deux cas de figure : l'arête entre v et w coupe un domino de T, où elle n'en coupe pas. Dans le deuxième cas, $h_T(w) = h_T(v) + 1$. Dans le deuxième cas, $h_T(w) = h_T(v) - 3$. Il s'ensuit que les dominos de T sont exctement ceux qui recouvrent les arêtes où la hauteur change de 3 au lieu de 1. Le même argument s'applique à U, et donc $T = U$. $\square$

Il est donc possible de définir un poset sur les pavages : on dira que $T \leq U$ si et seulement si $h_T(v) \leq h_U(v)$ pour tout v.

Lemme 2.8.3. *Supposons qu'on ait choisi* $v_0 = (0,0)$ *de telle sorte qu'il soit au côté sud ouest d'un carré blanc. Alors, pour n'import quel pavage* T*, et n'importe quel* $v = (x,y)$*, on a :*

— $h_T(v) \equiv 0 \mod 4$ *si* x *et* y *sont tous les deux pairs*
— $h_T(v) \equiv 1 \mod 4$ *si* x *est impair et* y *pair*
— $h_T(v) \equiv 2 \mod 4$ *si* x *et* y *sont tous les deux impairs*
— $h_T(v) \equiv 3 \mod 4$ *si* x *est pair et* y *impair*

Démonstration. Évident, en prenant n'importe quel chemin autorisé de v_0 à v (par récurrence sur sa longueur). $\square$

Exemple 2.8.1. *Pour le carré* 2×2*, il y a deux pavages. L'un est au dessus de l'autre dans l'ordre. Les fonctions hauteurs sont les mêmes sur le bord, et sont différent par 4 sur le seul point à l'intérieur.*

Ça veut dire que, dans n'importe quel poset de pavages, le "flip" qui remplace deux dominos horizontaux, adjacents sur leur côté long, par deux dominos adjacents verticaux, sera forcément une relation de couverture. (On verra qu'ils sont les seuls.)