COURS 8

Version du 19 février 2025.

Rappel. La dernière fois, nous avons commencé une parenthèse sur les treillis. Un treillis est un poset dans lequel n'importe quelle paire d'éléments x, y a un sup $x \vee y$ et un inf $x \wedge y$.

Une famille intéressante de treillis est les treillis de la forme $J(P)$, les parties inférieures de P, avec l'ordre donné par l'inclusion. (Une partie inférieure de P est un sous-ensemble I tel que si $x \in I$ et $y \leq x$, alors $y \in I$ aussi.) $J(P)$ est toujours un treillis, avec les opérations de treillis données par réunion et intersection. $J(P)$ est distributif, ce qui veut dire que dans le treillis on a les deux équations de distributivité qui sont vérifiées :

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \text{ et } x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

Nous avons énoncé le théorème suivant, le "théorème fondamental des treillis distributifs finis."

Théorème 2.7.2. *Un treillis fini est distributif si et seulement si il est isomorphe à l'ensemble des parties inférieurs d'un poset, ordonné par inclusion.*

Pour démontrer ce théorème, nous avons introduit la notion d'élément sup-irréductible d'un treillis. Un élément x est sup-irréductible s'il ne peut pas être exprimé comme sup de deux éléments qui lui sont strictement plus petit. Une définition équivalente (sous l'hypothèse que le treillis soit fini) est que x couvre exactement un élément.

J'ai aussi énoncé le lemme suivant, que nous commencerons notre cour d'aujourd'hui par démontrer.

Lemme 2.7.1. *N'importe quel élément dans un treillis fini peut être écrit comme sup des éléments sup-irréductibles en dessous de lui.*

2.7. **Parenthèse sur les treillis, *suite*.**

Démonstration du lemme 2.7.1. Il est évident que le sup des sup-irréductibles en dessous de x est inférieur ou égal à x, donc tout ce qu'il faut démontrer c'est qu'il est possible d'exprimer x comme sup de (certains) sup-irréductibles en dessous de lui, et on saura que le sup de tous sera aussi égal à x.

La démonstration se fait par récurrence sur L (selon une extension linéaire de L).

Soit x un élément de L, et supposons que nous sachions déjà que le lemme est vrai pour tout élément de L en dessous de x.

Supposons dans un premier temps que x n'est pas sup-irréductible. On peut donc l'exprimer comme $x = y \vee z$, avec $y, z < x$. Par récurrence, on sait déjà exprimer y et z comme sup de sup-irréductibles, et on a réussi.

Dans le cas où x est sup-irréductible, on peut l'écrire comme x, et on a déjà gagné. $\square$

Regardons encore le cas d'un treillis de la forme $J(P)$, pour se rappeler un peu de comment ça marche. (Ce n'est pas nécessaire pour la démonstration du théorème : nous savons déjà que $J(P)$ est distributif ; ce qui est difficile est de démontrer, juste à partir du fait que L est distributif, que L est de la forme $J(P)$.)

Lemme 2.7.2. *Soit $A \in J(P)$. Les éléments de $J(P)$ couverts par A sont les éléments de la forme $A \setminus \{a\}$, pour a un élément maximal de A.*

Démonstration. Si a est maximal dans A, $A \setminus \{a\}$ est bien toujours une partie inférieure, donc A couvre $A \setminus \{a\}$. Si $B \subset A$ et B est une partie inférieure de P, il doit y avoir au moins un des éléments maximaux de A qui n'est pas présent dans B, car sinon, $B = A$. Donc entre B et A dans l'ordre, il y a une partie inférieure de la forme $A \setminus \{a\}$, ce qui faut qu'il n'y a pas d'autres relations de couverture que celles que nous avons déjà trouvées. $\square$

Ici nous retrouvons le fait que j'ai mentionné la dernière fois, que les sup-irréductibles de $J(P)$ sont les parties inférieures principaux de P, c'est-à-dire, les éléments ayant un seul maximum a. Selon le lemme, un tel élément de P va couvrir un seul autre élément de P, ce qui le fait sup-irréductible. Écrivons $\langle a \rangle$ pour la partie inférieure engendré par a.

Nous voyons aussi qu'il y a une façon préférée d'exprimer $A \in J(P)$ comme sup de sup-irréductibles.

Lemme 2.7.3. *Pour $A \in J(P)$, on peut exprimer $A = \bigvee_{a \in X} \langle a \rangle$ pour n'importe quel $X \subseteq A$ qui contient les éléments maximaux de A.*

Démonstration. Il est certain que $\bigvee_{a \in X} \langle a \rangle \leq A$ pour tout $X \subseteq A$, donc il suffit de montrer que $\bigvee_{a \in \max A} \langle a \rangle = A$, ce qui est vrai : tout élément de A est en dessous d'un élément de $\max A$, et donc tout élément de A est contenu dans $\bigvee_{a \in \max A} \langle a \rangle = \bigcup_{a \in \max A} \langle a \rangle$. $\square$

Il en découle que pour chaque $A \in J(P)$, il y a une unique façon minimale de l'exprimer comme sup d'un ensemble de sup-irréductibles : selon le lemme, il faut prendre les sup-irréductibles qui correspondent aux éléments maximaux de A.

Dans des treillis (finis) plus généraux, il n'y a pas forcément une unique façon minimale d'exprimer un élément de cette manière. Pour certains treillis (« sup-semidistributifs », «join semidistributive »), il y a une notion de "sup-représentation canonique" qui demande à la fois que l'expression soit irrédondante, et aussi qu'elle utilise les éléments le plus bas possible dans le treillis.

C'est peut-être le moment d'indiquer que tout ce que nous avons fait pour l'opération sup et les sup-irréductibles, peut aussi se faire avec l'opération inf et les inf-irréductibles. (Exercise : à quoi ressemblent les inf-irréductibles dans $J(P)$? Avertissement : ce ne sont pas les parties supérieures principales, car les éléments de $J(P)$ sont par définition des parties inférieures.)

Il aurait également été possible de considérer un treillis de parties supérieures de P, mais ça revient à la même chose que de prendre les parties inférieures de P renversé (ce qu'on appelle le dual de P).

Nous sommes maintenant prêts à faire la démonstration du théorème 2.7.2.

Démonstration du théorème 2.7.2. Soit L un treillis distributif. Soit P l'ensemble d'éléments sup-irréductibles de L.

Pour $t \in L$, soit $I_t = \{p \in P \mid p \leq t\}$. Ceci définit une application ϕ de L vers $J(P)$. Or ϕ est injective par le lemme 2.7.1, et on voit clairement que ϕ est un isomorphisme d'ordre sur son image. Il faut donc démontrer que ϕ est surjective.

Soit $I \in J(P)$, et soit $t = \bigvee_{s \in I} s$. Nous voulons démontrer que $I = I_t$. Il est évident que $I \subseteq I_t$. (Jusqu'ici, tout ce que nous avons dit serait vrai pour n'importe quel treillis ! Il faut utiliser l'hypothèse que L est distributif.)

Soit $u \in I_t$. Nous avons l'équation

$$\bigvee_{s \in I} s = \bigvee_{s \in I_t} s$$

En appliquant $\wedge u$ des deux bords, et en utilisant la distributivité, on obtient :

$$\bigvee_{s \in I} (s \wedge u) = \bigvee_{s \in I_t} (s \wedge u)$$

Au côté droit, puisque $u \in I_t$, il y a u qui apparaît dans le sup, et on obtient u (les autres termes étant plus petits). Sur le côté gauche, si $u \notin I$, tous les $s \wedge u$ sont strictement inférieurs à u, et puisque u est sup-irréductible, on ne peut pas l'exprimer comme sup d'éléments strictement plus petits que lui. Donc on a $u \in I$, comme voulu. $\square$