COURS 7

Version du 19 février 2025.

Rappel. La dernière fois, nous avons fini avec le théorème de Dilworth, qui montre qu'un poset n'ayant pas d'antichaîne de taille $m+1$, peut être recouvert par m chaînes.

Nous avons aussi vu le théorème de Tutte, sur les graphes (pas forcément bipartis) qui contiennent un couplage. Encore une fois, une condition qui est (assez) évidemment nécessaire s'avère suffisante. Mais dans ce cas, même la condition, et sa nécessité ne sont pas si évidentes. Cette condition est la suivante : si on enlève un ensemble S de sommets, il faut qu'il n'y ait pas plus que $|S|$ composantes de taille impaire dans ce qu'il reste. (La nécessité provient du fait que chaque composante de taille impaire pose un “problème”, et les S sommets, lorsqu'on les rajoute, peuvent chacun régler au plus un de ces problèmes. Que cette condition soit suffisante n'est pas du tout clair ; la démonstration est assez longue et je ne vais pas essayer de la résumer.

2.7. **Parenthèse sur les treillis.** Lorsque nous parlons des mariages stables, il me faudra certaines notions sur les treillis, donc nous allons les regarder dès maintenant, pour ne pas être obligé de nous arrêter là-dessus une fois que les mariages stables ont été abordés.

Nous avons déjà parlé des posets (qui sont des relations réflexives, transitives et anti-symmétriques).

Pour qu'un poset P soit un treillis, il y a deux conditions nécessaires. La première c'est que pour tout paire $x, y \in P$, il faut qu'il existe un (unique !) élément maximum parmi ceux qui sont à la fois plus petit que x et plus petit que y. La deuxième c'est que, de façon dualle, pour tout paire $x, y \in P$, il faut qu'il existe un (unique) élément minimum parmi ceux qui sont plus grand que x et plus grand que y.

Le maximum des éléments en dessous de x et y est noté $x \wedge y$ et on l'appelle le inf (ou le meet) de x et y. Le minimum des éléments au dessus de x et y est noté $x \vee y$; on l'appelle le sup (ou le join) de x et y.

Un exemple d'un treillis : pour $n \in \mathbb{N}$, les diviseurs de n, ordonnés par divisibilité, forme un treillis. Là, $x \wedge y = \text{pgcd}(x, y)$, $x \vee y = \text{ppcm}(x, y)$.

Dans un treillis, on dispose donc de deux opérations, et on peut s'amuser à en faire de l'algèbre si on le souhaite. (Comme dans un anneau.) Il y a des identités satisfaites par ces opérations. Par exemple $\vee$ et $\wedge$ sont commutatives et associatives. Mais elles ont aussi des autres propriétés que l'on ne connaît pas de la théorie des anneaux. Par exemple, idempotence : $x \vee x = x$, $x \wedge x = x$. Exercise : il y a d'autres équations simples qui ne découlent pas des équations précédentes, et qui sont vérifiées dans n'importe quel treillis. Trouvez-les. De plus, on peut démontrer que tout ensemble avec deux opérations qui vérifient ces conditions (commutativité, associativité, idempotence, et une autre) provient effectivement d'un treillis dans le sens que nous l'avons défini. En particulier, on peut reconstruire le poset à partir de ces opérations : $x \leq y$ si et seulement si $x \wedge y = x$ si et seulement si $x \vee y = y$. Comme référence pour cette perspective sur les treillis, on peut prendre un des livres de Grätzer (General Lattice Theory, Lattice Theory, ...).

Cette perspective algébrique était le domaine de ce qui s'appellait "l'algèbre universelle." C'est moins à la mode actuellement. D'ailleurs, il y a une nouvel intérêt dans des aspects combinatoires des treillis. L'atelier à BIRS auquel je suis allé traitait de ce sujet-là. Pour une perspective plus combinatoire, il y a le troisième chapitre de Enumerative Combinatorics I de Stanley.

Un exemple classique d'un treillis est le treillis booléen des sous-ensembles de $\{1, \ldots, n\}$, ordonné par l'inclusion.

Plus généralement, soit P un poset. Une *partie inférieure* de P est un sous-ensemble I de P tel que, si $x \in I$ et $y \leq x$, alors $y \in I$. On peut ordonner les parties inférieures par inclusion.

Cela nous donne un treillis, que nous noterons $J(P)$: si A, B sont deux parties inférieures de P, la plus grande partie inférieure plus petit que A et que B, est $A \cap B$. De façon similaire, la plus petite partie inférieure plus grand que A et que B, est $A \cup B$.

On dit qu'un treillis est *distributif* si le sup distribue sur le inf et vice versa :

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$
$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

Effectivement, on peut montrer qu'il suffit de prendre l'un ou l'autre de ces équations comme hypothèse ; et puis l'autre en découle.

Nathan Williams a fait une jolie frise chronologique de la théorie des treillis, qui commence en 1880, quand C.S.Peirce dit que tout treillis est distributif, ce qui est "facilement démontré, mais cette démonstration est trop pénible pour être donnée." (La prochaine date importante :

en 1890, Schröder fait la remarque qu'effectivement, ce n'est pas tout treillis qui est distributif.)

Les diviseurs de n forment effectivement pas juste un treillis, mais un treillis distributif. (Exercise. Ça simplifie les choses beaucoup de supposer que la factorisation en facteurs premiers est unique.)

Lemme 2.7.1. *Soit P un poset. Alors $J(P)$ est distributif.*

Démonstration. Nous savons que sup et inf sont donnés par intersection et réunion. Les deux équations sont connues (et évidentes) pour ces opérations. □

Quel est l'intérêt de cette définition (si on ne s'est pas déjà embarqué dans la voie de l'algèbre universelle) ?

Théorème 2.7.1. *Un treillis est distributif si et seulement si il ne contient pas ni le pentagone ni le diamant comme sous-treillis.*

Aussi, il y a une condition combinatoire qui est peut-être encore plus intéressante pour nous.

Théorème 2.7.2. *Un treillis fini est distributif si et seulement si il est isomorphe à l'ensemble des parties inférieurs d'un poset, ordonné par inclusion.*

Donc l'exemple que nous avons déjà vu des parties inférieures est effectivement complètement général. (Au moins dans le cas des treillis finis. Le cas infini est plus compliqué. $\mathbb{Z}, <$ est distributif, mais n'est pas isomorphe aux parties inférieures d'un poset, n'ayant pas d'élément minimum.) Cela démontre un des sens du théorème. Pour l'autre sens, à partir d'un treillis distributif L, il faut trouver un poset P tel que $J(P)$ soit isomorphe à L.

Nous voulons retrouver, à l'intérieur de L, un poset tel que $L \cong J(P)$. Dans le cas de $J(P)$ lui-même, on sait le faire : ce sont les parties inférieures principales (engendrées par un seul élément). (A est partie inférieure principale de P s'il existe un a dans P tel que $A = \{y \in P \mid y \leq a\}$.) L'ordre sur $J(P)$, restreint aux parties inférieures principales, nous redonne l'ordre sur P.

Mais, comment identifier ces éléments à l'intérieur de L, sans qu'on sache déjà comment décrire L comme $J(P)$? Il s'avère que ce sont les éléments qui couvrent exactement un élément. (Si A est la partie principale engendré par a, le seul élément qui peut être enlevé de A est a ; et s'il n'y a qu'un seul élément a qui peut être retiré, c'est que tout autre élément est en dessous de lui.)

Il y a aussi une autre façon de décrire ces éléments qui ne couvrent qu'un seul élément : ce sont les éléments z qui ne peuvent pas être écrits comme $z = x \vee y$ de façon non triviale (c'est-à-dire, si $z = x \vee y$, alors $x = z$ ou $y = z$). Si z couvre deux éléments distincts, leur sup est z ; et si z ne couvre qu'un seul élément z_*, tout sup d'éléments strictement plus petit que z sera également plus petit où égal à z_*. On appelle ces éléments sup-irréductibles. (Attention : être sup-irréductible et ne couvrir qu'un seul élément ne sont plus la même chose dans des treillis infinis.)

Un intérêt des éléments sup-irréductibles c'est le résultat suivant :

Lemme 2.7.2. *N'importe quel élément dans un treillis fini peut être écrit comme sup des éléments sup-irréductibles en dessous de lui.*

(Il n'est généralement pas nécessaire de les utiliser tous.)