COURS 6

Version du 19 février 2025.

Rappel. La dernière fois, nous avons regardé une version grossière conjecturale du théorème de Menger, qui ne regarde pas "chemins" et "sommets à enlever" mais plutôt "chemins distants les uns des autre" et "sommets à enlever, chacun avec son voisinage jusqu'à une certaine distance". Une partie est démontrée, mais il y a aussi des contre-exemples. Nous n'avons pas entré dans les détails.

Nous avons regardé le théorème de mariage de Hall, qui donne les conditions sous lesquelles il existe un couplage qui contient toutes les sommets F dans un graphe bipartie avec parties F et H. Il y a une condition nécessaire évidente, et il s'avère que cette condition est suffisante.

Il y a aussi une version "défective" où on pose la question : "quelles sont les conditions nécessaires pour que toutes éléments de F, sauf k, puissent être recoverts. Encore, la condition nécesssaire évidente s'avère suffisante.

2.5. **Théorème de Dilworth.** Dans un poset, une chaîne est une sous-ensemble totalement ordonné (tout élément est comparable à tout autre élément). Une antichaîne est un ensemble où aucun paire d'éléments distincts sont comparables.

Théorème 2.5.1 (Théorème de Dilworth)**.** *Si un poset fini P n'a pas d'antichaîne de taille $m+1$, alors on peut exprimer P comme la réunion de m chaînes.*

Remarquons que le feeling de ce théorème est un peu différent de ceux que nous avons démontré en utilisant Ford–Fulkerson. Si on essaye d'imaginer les chaînes comme un flot dans un poset, on constate que notre hypothèse exclut les "grandes" coupures, pas les petites, et nous cherchons un flot qui utilise tous les sommets, ce qui n'est pas obligatoire dans le théorème de Ford–Fulkerson.

Remarquons aussi que le théorème est encore de la forme "condition nécessaire suffisante s'avère suffisante" : si on a une antichaîne de taille k, et on essaie de décomposer le poset en chaînes, chaque élément de l'antichaîne est forcément dans une différente chaîne, donc il nous faut au moins k chaînes.

Démonstration. La démonstration se fait par récurrence sur la taille de P. Supposons que P n'a pas d'antichaîne de taille supérieur à m. Nous cherchons donc à le décomposer en m chaînes. Soit C une chaîne maximale dans P. Si on retire C, on peut de nouveau chercher une antichaîne de taille maximale. Si la taille maximale est maintenant $m-1$, nous avons gagné par recurrence. La taille maximale ne peut pas grandir à cause du fait que nous avons enlevé des éléments, donc le cas problématique est où la taille maximale est encore m. Soit A une antîchaine de $S \setminus C$ de taille m.

Nous avons maintenant une antichaîne A de taille m, qui n'a pas d'intersection avec une chaîne maximale C. Cette chaîne ne sera pas finalement une des chaînes de notre décomposition, et ne peut pas l'être, car il faut que nous ayons une chaîne différente pour chaqu'un des éléments de A, donc on ne peut pas utiliser C. À quoi est-ce que C peut nous servir ?

Soit A_+ tout élément de P qui est supérieur à un élément de A :

$$A_+ = \{x \mid \exists a \in A, x \geq a\}$$

et de façon similaire

$$A_- = \{x \mid \exists a \in A, x \leq a\}$$

Nous allons utiliser l'hypothèse de recurrence sur A_+ et A_-. Pour ce faire, il faut que nous sachions que A_+ et A_- ne sont pas P tout entier. Là, C nous aide. L'élément maximum de C n'est pas lui-même dans A, puisque C n'intersecte pas A, et puisque l'élément maximum de C est un élément maximal de P, il n'y a aucun autre élément de P (et a fortiori de A) qui lui est supérieur. Donc, l'élément maximum de C n'est pas dans A_+, et, de façon similaire, l'élément minimum de C n'est pas dans A_-. Donc, on peut utiliser l'hypothèse de récurrence sur A_+ et sur A_- ; chacun est exprimé comme la réunion de m chaînes. Mais maintenant nous avons $2m$ chaînes au total !

Dans A_+, les éléments de A sont les éléments minimaux de chaque chaîne. Pourquoi ? Soit x l'élément minimal d'une chaîne, mettons, la chaîne qui contient $a \in A$. Si $x \neq a$, il faut qu'il y aît un élément $a' \in A$ avec $x \geq a'$. Mais là on a $a \geq x \geq a'$. Puisque A est une antichaîne, on doit avoir $a = a'$.

De façon similaire, les éléments de A sont les éléments maximaux de chaque chaîne dans A_-. Par transitivité, on peut donc coller les chaînes ensemble, pour avoir m au final, comme voulu.

Finalement, il faut remarquer que tout élément de P est contenu dans $A_+ \cup A_-$. Ceci découle du fait que A est une antichaîne maximale : s'il y avait un élément incomparable à A, on aurait pu l'ajouter à A pour obtenir une antichaîne encore plus grande. □

2.6. **Théorème de Tutte.** Mettons que nous avons n personnes très modernes qui veulent se marier. Donc on a juste un graphe qui indique qui est prêt à se marier avec qui. (Le graphe n'est plus forcément biparti.) Qu'est-ce qu'on peut dire. Comme le dit facebook, “c'est compliqué.” Mais il y a un théorème qui s'adresse à cette situation.

Encore une fois, le théorème est de la forme “condition nécessaire (assez) évidente est également suffisante.” Donc, commençons par la condition nécessaire.

Dans un pentagone, est-ce que tout le monde peut se marier. Évidemment que non, are on a un nombre impair de sommets. Okay, si je rajoute aussi un triangle ? Je n'ai plus un nombre impair de sommets. Mais évidemment ça ne résoult pas le problème. Le problème n'était donc pas le nombre de sommets, mais le fait d'avoir une composante de taille impaire.

Si j'ai un sommet qui est lié à trois triangles, est-ce que ça peut marcher ? Non, car si on enlève le sommet au milieu, on a trois composante impaires. Le sommet qu'on a enlevé peut régler une des composantes, mais ça nous laisse deux composantes qui sont toujours problèmatiques.

Donc, définissons $q(G)$ comme étant le nombre de composantes de taille impaire de G. (Par la suite, je vais juste parler de “composantes impaires” ou de “composantes paires”.)

La condition nécessaire évidente est que, pour chaque $S \subseteq G$, on a $q(G - S) \leq |S|$.

Théorème 2.6.1 (Théorème de Tutte)**.** *Un graph G contient un couplage qui recouvre tous ces sommets si et seulement si pour tout sous-ensemble S des sommets de G, on a $q(G - S) \leq |S|$.*

Démonstration. L'esquisse de la démonstration est la suivante. Soit $S_0 = \{s_1, \ldots, s_m\}$ un ensemble de sommets pour lequel $q(G - S_0) = |S_0|$. Supposons que le théorème est vrai et il existe un couplage M. Soient $C_1, \ldots, C_m$ les composantes impaires de $G - S_0$, et soient $D_1, \ldots, D_k$ les composantes paires. Pour chaque $s_i \in S_0$, il y a une arête de M qui lie s_i à un composante impaire. Après renuméroter au besoin, nous pouvons supposer que s_i est lié à c_i qui est un sommet de C_i. M restreint à chaque D_i est un couplage, et M restreint à $C - c_i$ est un couplage.

Nous allons, donc, trouver un tel S_0, et puis démontrer l'existence des couplages dans les composantes de $G - S_0$, ce qu'on fera par récurrence, ainsi qu'un couplage entre les éléments de S_0 et les composantes impaires.

Comment trouver S_0 ? Nous allons choisir S_0 maximal parmi les S pour lesquels $q(G-S) = |S|$. Ça va s'il y en a. Par l'hypothèse pour $S = \emptyset$, le nombre de sommets est pair. Donc, pour n'importe quel $S = \{s\}$, le nombre de sommets de $G - S$ est impair, donc il y a au moins une composante impaire, et par l'hypothèse, il n'y en a pas plus. Donc, n'importe quel $\{s\}$ est un choix possible pour S_0, et on peut donc bien prendre un S_0 maximal.

Comme dans l'esquisse, soient $C_1, \ldots, C_m$ les composantes impaires de $G - S_0$, et $D_1, \ldots, D_k$ les composantes paires. Ici $m = |S_0|$, par l'hypothèse sur S_0.

Nous voulons trouver un couplage dans D_i. Soit S' un sous-ensemble des sommets de D_i. $q(G - (S_0 \cup S')) = m + q(D_i - S')$, et $q(G - (S_0 \cup S')) \leq |S_0 \cup S'| = m + |S'|$. Donc $q(D_i - S') \leq |S'|$, et par récurrence, tous les D_i sont reglés.

Passons aux C_i. Dans C_i, on a un nombre impaire de sommets ; il y aura un sommet lié à un élément de S_0 dans le couplage final. On va donc choisir de façon arbitraire $c \in C_i$, et nous allons démontrer que $C_i - c$ contient un couplage, peu importe le choix de c.

On aimerait utiliser la même stratégie que pour D_i, mais c'est un peu plus compliquée. Supposons qu'il y a un sous-ensemble S' de $C_i - c$ qui pose problème. C'est-à-dire que $q(C_i - c - S') > |S'|$. S'il n'y en a pas, l'affaire est reglée comme pour D_i, mais il est possible que S' existe. Que faire alors ?

Regardons de plus près. $q(G - S_0 - c - S') = m - 1 + q(C_i - c - S') \leq m + 1 + |S'|$. Donc, $q(C_i - c - S') \leq |S'| + 2$. (Et nous savons déjà que $q(C_i - c - S') > |S'|$, donc $q(C_i - c - S') = |S'| + 1$ ou $|S'| + 2$.) Mais $q(C_i - c - S') \equiv |C_i - c - S'| \mod 2$, et $|C_i - c|$ est pair, donc $q(C_i - c - S') \equiv |S'| \mod 2$. Il s'ensuit que $q(C_i - c - S') = |S'| + 2$. Donc l'inéquation $q(C_i - c - S') \leq |S'| + 2$ était une équation, et $q(G - S_0 - c - S') \leq m + 1 + |S'|$ aussi. Et donc... ?

Et donc, S_0 n'était pas maximal parmi les ensembles S tels que $q(G - S) = |S|$! On aurait dû prendre $S_0 \cup \{c\} \cup S'$!

Donc il n'existe aucun S' problématique pour $C_i - c$, et nous avons donc un couplage dans chaque $C_i - c$, et ce, peu importe le choix du sommet c dans C_i.

Finalement, il nous faut un couplage entre les éléments de S_0 et les C_i. Puisque nous pouvons choisir n'importe quel $c \in C_i$ pour être lié à un élément de S, il suffit d'énumérer, d'un côté, les éléments de S_0, et de l'autre côté, les composantes C_i, et de mettre un lien entre $s \in S_0$ et C_i s'il y a une arête qui va de s vers un sommet de C_i. Il nous faut maintenant un couplage dans ce graphe biparti. Comment faire ?

Évidemment, il faut utiliser le théorème de Hall. Notons que, puisque les deux parties du graphe sont de la même taille, il y a deux façon différentes de procéder : on peut démontrer que pour chaque sous-ensemble de $C_1, \ldots, C_m$, il y a assez d'éléments de S, ou que pour chaque sous-ensemble de S_0, il y a assez de composantes impaires. Finalement, il revient à la même chose, mais il se peut que l'un ou l'autre soit plus facile à voir. Soit $\mathcal{C}$ un sous-ensemble de $C_1, \ldots C_m$, et soit S' tout élément de S_0 lié à un composante dans $\mathcal{C}$. Maintenant, $|\mathcal{C}| \leq q(S') \leq |S'|$, donc la condition de Hall est vérifiée, et nous avons un couplage.

Donc, on utilise ce couplage pour décider dans quel composante lier les sommets de S_0. Par la construction du graphe biparti, si on a déterminé qu'on veut lier $s \in S_0$ avec composante C_i, il existe au moins un sommet dans C_i lié avec s. On choisit ce sommet c_i arbitrairement. Maintenant, les graphes $C_i - c_i$ et D_i vérifient toujours la condition, et nous trouvons des couplages dans ces graphes par récurrence. $\square$