# COURS 5

Version du 19 février 2025.

**Rappel.** La dernière fois, nous avons regardé comment convertir notre démonstration du théorème de Ford–Fulkerson en algorithme pour améliorer un flot qui n'atteint pas encore la capacité minimale d'une coupure.

Nous avons regardé certaines variations sur le cadre de Ford–Fulkerson (des flèches avec des capacités infinies, des sommets avec des capacités, ...).

Nous avons aussi regardé le théorème de Menger, qui dit que dans un graphe $G$ le nombre minimal de sommets qui séparent $s$ et $b$ est égal au nombre de chemins disjoints entre $s$ et $b$ (seuls points de contact des chemins sont $s$, $b$) ; le nombre minimal d'arêtes qui séparent $s$ et $b$ est le nombre de chemins indépendants entre $s$ et $b$ (pas d'arêtes en commun).

La chose à retenir, dans les deux cas, c'est que le théorème de Ford–Fulkerson nous donne pas juste la démonstration, mais également l'énoncé, une fois qu'on a remplacé chaque arête de $G$ par une paire de flèches allant dans les deux sens, et qu'on met des capacités de 1 sur les flèches (respectivement, sur les sommets) pour la version ayant à faire avec la séparation par arêtes (respectivement, sommets).

J'ai regardé la démonstration de Menger. Elle est écrite en allemand, la terminologie de la théorie des graphes n'est pas encore standardisée, et Menger s'intéresse aussi pour des cas avec des sommets ayant un degré infini, et, plus généralement, à des questions à saveur plus topologique. Je crois avoir compris que l'énoncé voulu c'est son "Satz $\delta$," et que l'argument se fait par recurrence.

2.3. **Application : connexité (théorème de Menger), *suite*.** Une révision d'un article est apparu sur arXiv dans les dernier jours, par Nguyen, Scott, et Seymour, sur une version du théorème de Menger (arXiv :2401.06685). Les deux derniers sont des somités de la théorie des graphes (et Nguyen et l'étudiant de Seymour), donc je voulais vous en parler brièvement.

Ils regardent une version grossier du théorème de Menger. L'idée, plus généralement, est de développer des résultats qui s'intéressent pour le comportement des graphes uniquement à grande échelle.

La conjecture était la suivante :

**Conjecture 2.3.1.** *Soit $G$ un graphe, $S$ et $B$ deux ensembles de sommets, $k$ et $d$ deux entiers positifs. Alors il existe un entier $\ell$ positif tel que soit :*

*(1) il existe $k$ chemins entre $S$ et $B$, à distance au moins $d$, ou*

*(2) il existe un ensemble $X \subseteq V(G)$ avec $|X| \leq k-1$ tel que n'importe quel chemin entre $S$ et $T$ contient un sommet à distance au plus $\ell$ d'un élément de $X$.*

Regardons le cas $d = 1$. Dans ce cas, la conjecture affirme qu'il y a soit $k$ chemins disjoints entre $S$ et $B$, soit il existe un ensemble $X$ de sommets de taille $k-1$ tel que n'importe quel chemin passe “proche” d'un point de $X$.

Il suffit de prendre $\ell = 1$ : Menger nous dit que s'il n'y a pas $k$ chemins disjoints, alors il y a $k-1$ sommets qui sont suffisant pour séparer $S$ de $B$.

Le cas $k = 2$ de la conjecture est déjà démontré par Albrechtsen, Huynk, Jacobs, Knappe et Wollan ; et aussi par Georgakopoulos et Papasoglu (arXiv :2305.07456). Ça veut dire que, s'il n'y a pas deux chemins à distance $d$, il y a un goulot d'étranglement : tout chemin passe proche d'un seul sommet. Ici, comme le démontrent Georgakopoulos et Papasoglu, “proche” veut dire “à une distance de pas plus de $272d$.”

Nguyen, Scott et Seymour démontrent que le cas $k = 3$ est déja faux pour $d \geq 3$. Le cas $d = 2$ peut toujours être correct.

2.4. **Théorème de mariage de Hall.** Supposons qu'il y a $n$ femmes et $m$ hommes, qui veulent se marier (en couples un homme, une femme). Nous imaginons un graphe de mariages possibles. (Les mariages possibles forment les arêtes.) Pour quels graphes est-ce que toutes les femmes peuvent se marier ?

Il est évidemment nécessaire que, pour n'importe quel ensemble $S$ de femmes, le nombre total d'hommes qui sont connectés à au moins une femme de $S$, doit être au moins égale à la taille de $S$.

Le théorème de Hall dit que cette condition est également suffisante. (Le théorème de Hall est démontré par Hall en 1935 ; une version équivalente par König et Egerváry en 1931, et elles découlent du théorème de Menger de 1927.)

Un *couplage* est un ensemble d'arêtes disjoints (pas de sommets en commun).

**Théorème 2.4.1** (Théorème de Hall)**.** *Soit $G$ un graphe biparti, avec $F$ et $H$ les sommets des deux parties. Il existe un couplage contenant* *tout sommet de $F$ si et seulement si pour tout ensemble $S \subseteq F$, le nombre d'éléments liés à un élément de $S$ est au moins $|S|$.*

*Démonstration.* Utilisons le théorème de Ford–Fulkerson. Orientons les arêtes en flèches de $F$ vers $H$. Ajoutons une source et un but. Mettons une capacité de 1 sur chaque sommet. Si on arrive à trouver un flot avec flux net $|F|$, on a gagné. Si ce n'est pas possible, on peut enlever un nombre inférieur à $|F|$ sommets pour séparer le graphe. Mettons que nous pouvons le faire en enlevant $F'$ et $H'$. Maintenant, $F \setminus F'$ est connecté à au moins $|F \setminus F'|$ sommets de $H$, qui doivent se trouver dans $H'$. Donc, il aurait fallu enlever $|H'| + |F'| \geq |F \setminus F'| + |F'| = |F|$ sommets, ce qui donne une contradiction. □

Un autre cas de figure où on utilise le théorème de Hall c'est quand on a une collection d'ensembles, $A_1, \ldots, A_n$ d'un ensemble $X$, et on veut choisir $a_i \in A_i$ avec les $a_i$ distincts. (On dira "système de représentants uniques.") On peut considérer le graphe avec $n$ sommets d'un côté pour les ensembles $A_1, \ldots, A_n$, et les éléments de $X$ de l'autre bord, avec une arête de $A_i$ à $x$ si $x \in A_i$.

Et si on se permet que $k$ des femmes ne se marient pas ? Évidemment, encore, il est nécessaire que, pour chaque ensemble de $s$ femmes, il y a au moins $s - k$ hommes qui peuvent se marier avec au moins une d'entre elles. (Si $s - k \leq 0$, la condition est automatiquement satisfaite.) Encore, cette condition nécessaire est suffisante.

**Théorème 2.4.2.** *Soit $G$ un graphe biparti, avec $F$ et $H$ les sommets des deux parties. Il existe un couplage qui couvre tous sauf $k$ des sommets de $F$ si et seulement si pour tout ensemble $S \subseteq F$, le nombre d'éléments liés à un élément de $S$ est au moins $|S| - k$.*

*Démonstration.* On invente $k$ hommes imaginaires qui sont prêts à se marier avec n'importe qui. Maintenant, toute ensemble $S$ de femmes a $|S|$ hommes qui sont prêts à se marier avec elles, donc la condition de Hall est satisfaite, et toutes les femmes peuvent se marier. Parmi elles, ceux qui se sont mariées aux hommes imaginaires ne reçoivent pas de mari. Mais ceci arrive à au plus $k$ d'entre elles. □

Et si on a des universités qui veulent embaucher des postdocs ? Un postdoc ne peut être embauché que par une seule université, mais une université a les moyens, il se peut qu'elle souhaite en embaucher plusieurs. Supposons donc que nous avons $u_1, \ldots, u_n$ et que $u_i$ souhaite embaucher $d_i$ postdocs. Que faire ?

C'est très simple : on remplace $u_i$ par $d_i$ sommets $u_i^1, \ldots, u_i^{d_i}$, et on fait le même jeu qu'avant. Pour que toutes les universités puissent embaucher autant de postdocs qu'elles le souhaitent, il faut que pour chaque ensemble d'universités, la somme des $d_i$ soit inférieure ou égal au nombre total de postdocs qu'elles sont prêtes à embaucher.

Ces autres cas peuvent aussi être déduits directement du théorème de Ford–Fulkerson.