COURS 4

Version du 19 février 2025.

Rappel. Nous avons démontré la dernière fois le lemme cruciale pour Ford–Fulkerson, qui dit que, si j'ai un flot f dans un graphe G, soit je peux améliorer f, soit il existe une coupure $(S, \overline{S})$ dans G telle que le flux net de f est égal à $c(S, \overline{S})$.

En utilisant ce lemme, nous avons démontré le théorème de Ford–Fulkerson, qui dit que le flux maximal est égal à la capacité minimale d'une coupure.

2.2. **Flots dans un graphe avec des capacités sur les flèches, suite.** Le théorème de Ford–Fulkerson nous dit comment trouver le flux net maximal. Est-ce qu'on est satisfait ? — Pas vraiment. Dans le cadre de ce cours, en particulier, nous espérons un algorithme qui va nous permettre de trouver un flot ayant le flux net maximal.

Supposons que les capacités sont des entiers. Il s'ensuit que la capacité minimale d'une coupure est un minimum d'entiers non negatifs. Donc, on peut commencer avec le flot 0, et à chaque étape améliorer le flot par un flux net d'au moins 1. (Parce que le montant par lequel on est autorisé d'augmenter le flux maximal, ϵ, sera lui aussi un entier.) Après un nombre fini d'étapes, on aura retrouvé le flux maximal. Puisque, à chaque étape, on modifie le courrant dans chaque flèche par un montant entier, les courrants sont toujours des entiers.

Théorème 2.2.2. *Si les capacités des flèches sont des entiers, alors il existe un flot maximal ayant tout les courrants également des entiers, qu'on peut trouver en faisant un nombre fini d'améliorations en utilisant le lemme de la dernière fois.*

Remarquons qu'il y a très souvent plusieurs flots maximaux, et que leurs valeurs ne sont pas forcément toutes des entiers. Tout ce qu'on dit c'est qu'on peut trouver un flot maximal avec les valeurs des courrants des entiers.

(Si on veut juste savoir que le flux net maximal est un entier, c'est beaucoup plus facile : il découle directement du théorème de Ford–Fulkerson.)

Flèches à capacités réelles. Il est possible de construire un graphe, et une suite d'améliorations du flux net (produites à partir d'un chemin de s à b, comme dans le lemme), où, à chaque étape, on fait l'amélioration maximale qui est permise pour notre choix de chemin (et qui est non nulle). Exercice (pas facile) : trouver un tel exemple. (Vous avez le droit de choisir le chemin pour l'augmentation à chaque étape, si c'est un chemin qui permet une augmentation.)

Il existe de meilleurs algorithmes qui vont terminer même dans ce cas.

Flèches à capacités rationnelles. Si les flèches ont des capacités rationnelles, on peut multiplier par un dénominateur commun et appliquer l'argument pour les flèches dont les capacités sont des entiers. Tout marche bien : on conclut qu'il existe un courrant avec flux net maximal qui peut s'exprimer sur ce même dénominateur commun.

Flèches à capacités infinies. Rien ne change dans la démonstration, s'il y a des flèches à capacité infinite, pourvu que le flux net maximal est toujours fini. (Si le flux net maximal est $N < \infty$, ça ne change rien du tout de remplacer les bornes infinies par N.)

Plusieurs sources, plusieurs buts. Si on a plusieurs sources, on peut les connecter à une super-source, et même chose pour plusieurs buts. La meilleure façon de le faire c'est d'utiliser des flèches à capacité infinie. Comme ça, couper une flèche qui relie la super-source à une des sources, ou un des buts à un super-but, nous donne une coupure à capacité infinie. La coupure minimale est donc une coupure qui sépare la super-source et le super-but, et qui n'utilise pas les flèches incidentes à la supersource ou au super-but ; ça fait qu'on peut considérer les coupures dans le graphe de départ, qui séparent les sources (d'un côté) des buts (de l'autre côté).

Capacités sur les sommets au lieu des flèches. On peut modéliser cela en utilisant les capacités sur les flèches. Remplace chaque sommet par deux sommets et une petite flèche ayant la capacité voulue. (Les flèches qui entraient à ce sommet entrent dorénavant la source de la petite flèche, et ceux qui sortaient de ce sommet sortent dorénavent du but de la petite flèche.) Sur les flèches présentes au départ, mets une capacité infinie. Là, un flot dans cette graphe sera exactement un flot respectant les capacités des sommets, et donc le flux maximal est la capacité minimale d'une coupure dans cette graphe. C'est inutile de couper les flèches présentes au départ, car elles ont une capacité infinie, donc la capacité d'une telle coupure est infinie. La coupure consiste donc à couper un ensemble de nouvelles flèches. Dans le graphe de départ, ça revient à enlever un ensemble de sommets, et de prendre la somme des capacités qui y sont associées.

2.3. **Application : connexité (théorème de Menger).** Soit G un graphe non orienté, et soient s et b deux sommets distincts. On peut se poser la question : combien d'arêtes est-ce qu'il faut enlever de G pour que s et b soient en composantes différentes. On peut aussi poser la question où on enlève des sommets au lieu des arêtes. Des réponses à ces questions sont données par le théorème de Menger. Ce théorème remonte à 1927, tandis que le résultat de Ford–Fulkerson date de 1962. Mais en utilisant le théorème de Ford–Fulkerson, il est très facile de démontrer le théorème de Menger

Nous disons que deux chemins de s à b sont *disjoints* si les seuls sommets qu'ils ont en commun sont s, b. Nous disons qu'ils sont *indépendants* s'ils n'ont aucune flèche en commun. (Donc deux chemins peuvent être indépendant sans être disjoints.)

Théorème 2.3.1 (Théorème de Menger)**.** *Soient G, s, b, comme ci-haut. Le nombre minimal de sommets qui séparent s de b est le nombre maximal de chemins disjoints de s à b. (Pour ce cas, il faut supposer qu'il n'y a pas d'arête qui va directement de s à b.)*

Le nombre minimal d'arêtes qui séparent s de b est le nombre maximal de chemins indépendants.

Démonstration. Remplace chaque arête de G par deux flèches, qui vont dans les deux sens, avec une capacité de 1 sur chaque sommet. The flux net maximal de s à b est égale à la capacité minimale d'un ensemble de sommets qui sépare s de b. (Nous utilisons la version de Ford–Fulkerson pour les sommets.) C'est donc cette capacité que nous cherchons. Par la version intégrale de Ford–Fulkerson, il y a un flot qui réalise le flux net maximal ayant des courrants entiers. Puisque chaque sommet à part s, b a une capacité de 1, les seuls courrants possibles sont 0 et 1. Le condition sur les capacités des sommets fait qu'un flot maximal entier est composé de (un ou plusiuers) chemins disjoints de s à b.

Pour la version avec les arêtes, au lieu de mettre une capacité de 1 sur chaque sommet, on met une capacité de 1 sur chacune des flèches. Ici, parce que les capacités sont sur les flèches, les différentes chemins peuvent se toucher dans un sommet, ce qui explique pourquoi il faut compter les chemins indépendants. □