COURS 3

Version du 17 février 2025.

Rappel. Nous avons commencé à regarder les flots dans un graphe. C'est une fonction qui associe à chaque flèche e une valeur $f(e)$ tel que, à chaque sommet, sauf s et b, le montant qui entre est égal au montant qui sort. Le flux net est le montant qui part de s moins ce qui y entre, ou bien le montant qui arrive à b moins ce qui en sort.

Nous avons regardé le polytope des flots dans un graphe sans cycles orientés : les flots de flux net m forment un polytope (envelope convexe d'un nombre fini de points : ici, on peut prendre pour les points les "routes" (chemins de s à b). Exercice : quel est le problème si on a des cycles orientés ?

Nous avons aussi commencé à regarder les flots dans un graphe (qui peut avoir des cycles orientés) avec une capacité sur chaque flèche, qui donne une borne pour le courrant dans la flèche.

Pour $S \subseteq V$, $s \in S$, $b \notin S$, nous écrivons $c(S, \overline{S})$ pour la capacité de la coupure définie par S : c'est la somme des capacités des flèches qui pointent de S vers $\overline{S}$. Nous avons démontré que le flux net peut être calculé comme $f(S, \overline{S}) - f(\overline{S}, S)$; il s'ensuit que le flux net est au plus $c(\overline{S}, S)$. Mais on va démontrer quelque chose de plus fort.

2.2. **Flots dans un graphe avec des capacités sur les flèches, suite.**

Théorème 2.2.1 (Théorème de Ford–Fulkerson, dit ≪ max flow min cut ≫)**.** *Le flux net maximal d'un flot dans un graphe G avec capacités données par c, est égale à la capacité minimale d'une coupure.*

Cette équation peut se voir comme deux inéquations, l'une que nous avons déjà justifiée facilement, et l'autre qui prendra plus d'efforts.

Nous allons commencer avec un lemme.

Lemme 2.2.1. *Si f est un flot dans un graphe G avec capacités donnés par c, soit il existe une coupure $(S, \overline{S})$ avec capacité égale au flux net de f, soit il est possible d'améliorer f (c'est-à-dire, il existe un flot avec un flux strictement plus grand).*

Démonstration. Essayons de définir S de façon recursive. Au départ, mettons $s \in S$. Pour n'importe quel $x \in S$, si $x \xrightarrow{e} y$, et $f(e) < c(e)$, on met $y \in S$. Aussi, si $x \xleftarrow{e} y$, et $f(e) \neq 0$, on met $y \in S$.

Si $b \in S$, alors il y aurait une suite de flèches de s jusqu'à b, qui forment un chemin de s à b où, à chaque pas, soit la flèche va dans le sens du chemin et n'est pas utilisé à sa capacité, soit il va dans le sens opposé et a un courant non nul. Dans le premier cas, mettons $\epsilon(e) = c(e) - f(e)$, et dans le deuxième cas, mettons $\epsilon(e) = f(e)$. Soit ϵ le minimum des $\epsilon(e)$ le long du chemin. Définit f' par $f'(e) = f(e) + \epsilon$ si e va dans le sens du chemin, et $f'(e) = f(e) - \epsilon$ si e va dans le sens contraire.

Ce nouveau flot a un flux net de $m + \epsilon$. Nous avons réussi à améliorer le flot f.

Maintenant, supposons que $b \notin S$. Alors, S est une coupure. Puisque toutes les flèches qui vont de S vers $\overline{S}$ sont utilisées à leur capacité, tandis qu'aucune des flèches de $\overline{S}$ vers S n'est utilisé, en utilisant le lemme de la dernière fois qui permet de calculer le flux net à partir de n'importe quelle coupure, on trouve que le flux net est égale à la capacité de la coupure. Donc nous dans ce cas, nous avons réussi à trouver une coupure. □

Démonstration du théorème 2.2.1. On commence avec un petit peu d'analyse ! Pourquoi est-ce qu'il y a un flot de flux net maximal ? Serait-il possible que les flux nets possibles soient une intervalle de la forme $[0, b)$?

Nos flots se trouvent dans $\prod_{e \in E(G)} [0, c(e)]$, qui est compacte. Ça veut dire que n'importe quelle suite infini de flots $f_1, f_2, \dots$ contient une sous-suite dont les valeurs $f_i(e)$ converge. (C'est surprenant, quand même !) Choisissons une série qui converge vers b, le suprémum des flux nets possibles, et puis une sous-série qui converge pour chaque e. La limite de cette sous-série est elle-même un flot, qui respecte toujours les capacités, et son flux net est b. (Remarquons que ça n'aurait pas marché si on demandait que les courants soient strictement inférieurs aux capacités.) Donc le suprémum est réalisé ! (On a peut-être l'impression qu'un tel argument n'est pas à sa place dans un cours de combinatoire, mais une raison d'y penser c'est pour comprendre que le cas des graphes infinis risque d'être plus compliqué, car l'espace des flots ne sera plus compacte.)

Donc, pour l'instant, nous ne savons pas quelle est le flux net maximal des flots, mais nous savons qu'il existe, qu'il y a un flot qui le réalise. Soit m ce flux net maximal, et f un tel flot.

Maintenant, appliquons le lemme. Puisque f est maximal, il est impossible de l'améliorer, ce qui veut dire que, selon le lemme, il doit y avoir une coupure avec capacité égal au flux net de f. Nous avons donc réussi. □