COURS 23

Version du 15 avril 2025.

Rappel. La dernière fois, j'ai mentionné que la formule des longueurs des équerres nous donne une façon d'échantilloner la distribution uniforme sur les tableaux tstandards de forme λ. (Et que, même si on pourrait utiliser le processus aléatoire développé dans la démonstration de la formule, il vallait mieux procéder autrement.)

Nous avons établi le deuxième théorème fondamental du jeu de taquin pour les tableaux standards : si on rectifie tous les tableaux standards de forme ν/λ, le nombre de fois qu'on obtiendra un tableau particulier dépend uniquement de la forme du tableau.

Nous avons démontré le premier théorème fondamental pour les tableaux semistandards : c'est à dire que la rectification d'un tableau semistandard ne dépend pas de l'ordre choisi pour les glissments de jeu de taquin pendant la rectification. L'idée c'est qu'il est possible de réétiquetter les cases d'un tableau semistandard : on commence avec les cases avec l'étiquette 1, et on les numérote de gauche à droite, à partir de 1. Puis on continue avec les cases avec l'étiquette 2, et ainsi de suite. La rectification selon les étiquettes semistandards est identique à la rectification selon les étiquettes standards, et donc la rectification semistandard est bien définie.

3.7. **Les théorèmes fondamentaux et les tableaux semistandards, *suite*.** La dernière fois, nous avons effectivement montré (sans le dire) que le standardisé de T est dual équivalent à T. (Ce que nous avons montré est même plus fort : les façon que se déplacents les tuiles individuelles du standardisé de T sont les mêmes que la façon que se déplacent les tuiles de T.) Il s'ensuit que tous les remplissages semistandards d'une même forme λ sont dual équivalents.

En suite, ça veut dire que chaque classe d'équivalence duale des remplissages semistandards contient exactement un remplissage qui donne chaque n'importe quel tableau droite de la bonne forme. Donc, le nombre de fois qu'apparaît n'importe quel tableau semistandard dans la rectification de l'ensemble des tableaux standards de forme ν/λ est donc le même.

3.8. **Fonctions symétriques.** On fixe un nombre infini de variables $x_1, x_2, \ldots$.

Une composition faible α de n est une suite infinie d'entrées non négatives dont la somme est n. (Donc il n'y a qu'un nombre fini d'entrées non nulles dans un tel α.) Nous écrirons x^α pour $x_1^{\alpha(1)} x_2^{\alpha(2)} \ldots$.

Une fonction symétrique de degré n est une somme (formelle) sur les compositions faibles de n de la forme

$$\mathrm{Sym}_n = \{\sum_\alpha c_\alpha x^\alpha\}$$

où $c_\alpha = c_\beta$ si α est une permutation de β.

On écrit Sym pour la somme directe $\mathrm{Sym}_0 \oplus \mathrm{Sym}_1 \oplus \mathrm{Sym}_2 \oplus \ldots$.

Par exemple, $f = \sum_{i=1}^\infty x_i$ est une fonction symétrique. Sym a un structure d'anneau : le produit de deux fonctions symétriques (dans le sens normal) est encore une fonction symétrique. Par exemple, $f^2 = \sum_i x_i^2 + \sum_{i<j}(x_i x_j + x_j x_i)$ est également une fonction symétrique.

Il faut souligner qu'une "fonction symétrique" n'est pas en réalité une fonction. Elle est une série formelle, et il n'est typiquement pas possible de substituer des valeurs pour les x_i. (Si on veut le faire, on va typiquement envoyer toutes les variables sauf un nombre fini à zéro, ce qui simplifie les choses.)

Soit λ une partition, que nous écrivons comme $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \ldots)$ avec un nombre fini d'entrées positives, et un nombre infini de zéros à la fin (donc, comme composition faible). Écrivons $\pi(\lambda)$ pour l'ensemble des permutations de λ. Par exemple, si $\lambda = (1, 0, 0, \ldots)$, $\pi(\lambda) = \{(1, 0, 0, \ldots), (0, 1, 0, \ldots), (0, 0, 1, 0, \ldots), \ldots\}$. Si $\lambda = (2, 1, 0, 0, \ldots)$, alors $\pi(\lambda) = (2, 1, 0, 0, \ldots), (2, 0, 1, 0, \ldots), (1, 2, 0, 0, \ldots), (1, 0, 2, 0, \ldots), \ldots$.

Maintenant, définissons :

$$m_\lambda = \sum_{\sigma \in \pi(\lambda)} x_1^{\sigma(1)} x_2^{\sigma(2)} \ldots$$

Évidemment, si $\lambda \vdash n$, alors $m_\lambda \in \mathrm{Sym}_n$, et effectivement le nombre (fini !) des m_λ avec $\lambda \vdash m$ forme une base linéaire de Sym_n. L'ensemble de m_λ s'appelle la base monomiale (de Sym, de Sym_n, ...).

3.9. **Fonctions de Schur.** Soit ν/λ une forme gauche. La fonction de Schur $s_{\nu/\lambda}$ est définie par :

$$s_{\nu/\lambda} = \sum_{T \text{ semistandard de forme } \nu/\lambda} x^T$$

où x^T veut dire $x_1^{\text{nombre de 1 dans } T} x_2^{\text{nombre de 2 dans } T} \dots$. (On dira que le contenu de T est la composition faible (nombre de 1s dans T, nombre de 2s dans T, ...).

$s_{\nu/\lambda}$ est une somme (formelle) d'un nombre infini de monômes dans les variables $x_1, x_2, \dots$, mais ce n'est pas immédiatement visible que $s_{\nu/\lambda}$ est symétrique.

Quand même, c'est vrai dans des exemples.

$$
\begin{aligned}
s_{(1)} &= x_1 + x_2 + \cdots = m_{(1)} \\
s_{(2)} &= x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_2^2 + x_2x_3 + \cdots = m_{(2)} + m_{(11)} \\
s_{(11)} &= x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_2x_3 + x_2x_4 + \cdots = m_{(11)} \\
s_{(3)} &= x_1^3 + x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_2^3 + \cdots = m_{(3)} + m_{(21)} + m_{(111)} \\
s_{(21)} &= x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + 2x_1x_2x_3 + \cdots = m_{(21)} + 2m_{(111)} \\
s_{(111)} &= x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 + \cdots = m_{(111)}
\end{aligned}
$$

La symétrie, nous la démontrerons la prochaine fois.