COURS 22

Version du 15 avril 2025.

Rappel. La dernière fois, nous avons démontré la formule pour le nombre de tableaux standards de forme donnée λ en termes des longueurs des équerres de λ. Soit $F_\lambda = n!/\prod_{(i,j)\in\lambda} h_{i,j}$. Ce que nous avons démontré est donc que $f_\lambda = F_\lambda$.

Il est évident que $f_\lambda = \sum_{(i,j) \text{ maximal dans } \lambda} f_{\lambda\setminus(i,j)}$. Par recurrence, on peut supposer que $f_{\lambda\setminus(i,j)} = F_{\lambda\setminus(i,j)}$. Donc la démonstration revient à démontrer que $F_\lambda = \sum_{(i,j) \text{ maximal dans } \lambda} F_{\lambda\setminus(i,j)}$, ou bien $1 = \sum_{(i,j) \text{ maximal dans } \lambda} F_{\lambda\setminus(i,j)}/F_\lambda$. Lorsqu'on considère ces quotients, on constate qu'il y a beacoup de simplifications, car plusieurs équerres sont les mêmes dans λ et $\lambda \setminus (i,j)$. Une fois ces expressions simplifiés, nous avons réussi à les voir comme les probabilités d'un processus aléatoire, ce qui explique pourquoi leur somme est un.

3.7. **Formule des longueurs des équerres, suite.** Compter les objets dans une classe a souvent des liens avec l'échantillonage.

Ici, la formule que nous avons démontré nous permet de faire un échatillonage uniformément au hasard des tableaux standards de taille λ.

La proportion des tableaux standards avec un n dans la boite (i,j) est exactement $F_{\lambda\setminus(i,j)}/F_\lambda$. Donc, on peut placer le n de façon aléatoire, selons ces probabilités. Ensuite dans λ privé de la case contenant n, on peut placer $n-1$ de façon similaire, et ainsi de suite.

3.8. **Deuxième théorème fondamental du jeu de taquin.** Il y a quelques semaines, nous avons démontré le premier théorème fondamental du jeu de taquin, qui dit que la rectification d'un tableau standard gauche ne dépend pas de l'ordre dans lequel on fait la rectification.

Il y a plus à dire là dessus, si on regarde ce qui se passe à partir de *tous* les remplissages d'un tableau gauche standard. Regardons la rectification $(3,2)/(1)$, par exemple. Il y a cinq remplissages standards. On les rectifie, et on obtient chaque remplissage de $(1,3)$ une fois, et chaque remplissage de $(2,2)$, une fois.

Si on commence avec $(3,2,1)/(2,1)$, on sait bien ce qui se produit, par la correspondance de Robinson–Schensted–Knuth : on obtient une fois le (seul) remplissage de (1,1,1), une fois le seul remplissage de (3), et deux fois chacun des remplissages de (2,1).

Ce que l'on constate c'est que si on commence avec tous les remplissages standards de λ/μ, et on les rectifie, le nombre de fois que l'on obtient un remplissage particulier de forme λ ne dépend pas du remplissage particulier, mais uniquement de la forme λ.

Les remplissages de λ/μ se divisent en classes d'équivalence duale. (Si la forme est droite, il n'y en a qu'une seule classe d'équivalence, et dans certains autres cas, c'est également vrai, mais souvent, il y a aura plus qu'une seule.)

Les éléments d'une classe d'équivalence duale dans $TS(\lambda/mu)$, lorsqu'ils sont rectifiés, ont tous forcément la même forme, disons ν. Et tous les remplissages de forme ν sont dual équivalents, et donc, si en inversait la rectification, on obtiendrait forcément d'autres remplissages de λ/μ.

3.9. **Les théorèmes fondamentaux et les tableaux semistandards.** Je rappelle que, presque depuis le début de notre analyse des tableaux, nous avons choisi de nous restreindre aux tableaux standards. Ça nous a permis d'utiliser une certaine dualité entre les tableaux standards et les suites de glissements de jeu de taquin qui définissent une rectification. Mais il y a des raisons pour lesquelles il est intéressant de connaître les résultats également pour les tableaux semistandards.

Théorème 3.9.1 (Premier théorème fondamental du jeu de taquin, version semistandard)**.** *Soit T un remplissage semistandard de la forme ν/λ. Alors la rectification de T est bien définie : elle ne dépend pas de l'order dans lequel elle est faite.*

Démonstration. On numérote les entrées de T de 1 à $n = |T|$. Premièrement, on numérote de gauche à droite les 1, puis les 2, et ainsi de suite. Le résultat est un tableau standard. Lorsqu'on décide quelle tuile déplacer dans le jeu de taquin :

— Il n'importe pas si on fait la comparaison selon les étiquettes standards ou selon les étiquettes semistandards : si les étiquettes semistandards sont $i < j$, alors les étiquettes standards sont dans le même ordre. Si les étiquettes semistandards sont les mêmes, on va choisir le déplacement vertical au lieu d'horizontal, et c'est ce qui se passe également selon les étiquettes standards, en vertu du fait que nous avons étiqueté les entrées égales de gauche à droite.

— Après le déplacement, il est toujours le cas que les entrées ayant la même étiquette semistandard restent en ordre de gauche à droite, donc le même argument qu'avant justifie que le prochain déplacement sera le même qu'il soit calculé en utilisant les étiquettes standards ou semistandards.

□