## COURS 21

Version du 15 avril 2025.

**Rappel.** La dernière fois, nous avons démontré le théorème de Greene, qui explique la signification de la forme de $P(\pi)$, en terme de la taille maximale de $k$ sous-kots croissants, ou de $k$ suites décroissantes. La démonstration a été fait en deux étapes : premièrement, nous l'avons démontré pour $\mathrm{mot}(P(\pi))$, et ensuite nous avons montré que si deux permutations sont reliés par une relation élémentaire de Knuth, alors la taille maximale d'une collection de $k$ sous-mots croissants ne change pas.

3.7. **Formule des longueurs des équerres.** Aujourd'hui nous allons regarder une formule pour $f_\lambda$, le nombre de tableaux standards de forme $\lambda$.

Pour $v$ une case de $\lambda$, l'équerre de $v$ est composée de $v$, les cases dans la même ligne à droit de $v$ (le "bras"), et les cases dans la même colonne au dessus de $v$ (la "jambe"). (Possiblement les noms sont plus intuitifs si on utilise la convention anglaise.)

Nous écrivons $(i, j)$ pour la case ayant $x$-coordonnée $i$ et $y$-coordonnée $j$. Nous écrivons $h_{ij}$ pour la longueur de l'équerre qui correspond à la case $(i, j)$.

**Théorème 3.7.1.** *Le nombre de tableaux standards de Young de forme $\lambda \vdash n$ est la suivante :*

$$f_\lambda = \frac{n!}{\prod_{(i,j)\in\lambda} h_{ij}}$$

Un jeudi de mai, 1953, Robinson visitait Frame à Michigan State University. Frame a conjecturé le résultat. Robinson ne croyait pas qu'il puisse exister une formule aussi simple, mais finalement les deux l'ont démontré ensemble. Samedi, ils sont allés à une rencontre à l'université de Michigan, où Frame a présenté leur résultat. Thrall était dans la salle, et a été très surpris, car il l'avait démontré le jour même lui aussi.

Nous allons donner la démonstration de Greene, Nijenhuis et Wilf.

Définissons $F(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \frac{n!}{\prod_{(i,j)\in\lambda} h_{ij}}$ si $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_m$.

La case de $\lambda$ où est situé $n$ est une des cases maximaux.

Écrivons $F$ pour $F(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)$ et $F_i$ pour $F(\lambda_1,\ldots,\lambda_{i-1},\lambda_i-1,\lambda_{i+1},\ldots,\lambda_m)$. Il suffit donc de démontrer que $F=\sum_i F_i$. Nous utilisons ici la convention que nous venons de définir, que si le résultat de soustraire 1 ne donne pas une partition, alors $F$ de cette suite est nulle.

Nous allons vérifier que $1=\sum_i F_i/F$.

Soit $(i,j)$ une case de $\lambda$, pris uniformément au hasard. Une deuxième case $(i',j')$ est pris au hasard dans les cases de l'équerre de $(i,j)$, différente de $(i,j)$. On répète, choisissant une case au hasard dans l'équerre de $(i',j')$ (pas égal à ce dernier). On répète jusqu'à ce qu'on tombe sur une case maximale (dont l'équerre est juste elle-même). On appelle tout se processus un essai.

Soit $p((i,j))$ la probabilité que ce processus se termine dans la case $(i,j)$, qui est, par hypothèse, une case maximale. J'affirme que cette probabilité est $F_i/F$.

Démonstration : les équerres qui ont changés entre $F_i$ et $F$ sont celles qui correspondent aux boites dans la même ligne que $(i,j)$, ou dans le même colonne que $(i,j)$. Il y a aussi un facteur de $n$ qui provient du fait que $n!$ est remplacé par $(n-1)!$.

Donc

$$\begin{aligned}\frac{F_i}{F}&=\frac{1}{n}\prod_{1\le k<j}\frac{h_{i,k}}{h_{i,k}-1}\prod_{1\le k<i}\frac{h_{k,j}}{h_{k,j}-1}\\&=\frac{1}{n}\prod_{1\le k<j}1+\frac{1}{h_{i,k}-1}\prod_{1\le k<i}1+\frac{1}{h_{k,j}-1}\end{aligned}$$

Considérons un essai qui commence à $(a_0,b_0)$ et passe par $(a_1,b_1),(a_2,b_2)\ldots$ pour terminer à $(a_k,b_k)=(i,j)$.

Appellons les projections verticaux l'ensemble $A=\{a_0,\ldots,a_k\}$ et les projections horizontaux $B=\{(b_0,\ldots,b_k)\}$. Nous voulons établir la probabilité qu'un essai qui commence à $(a_0,b_0)$ ait les projections $A$ et $B$. Écrivons $p_{A,B}$ pour cette probabilité.

**Lemme 3.7.1.** *La probabilité qu'un essai qui commence à $(a_0,b_0)$ ait les projections verticaux et horizontaux $A,B$ est donné par la formule suivante :*

$$p_{A,B}=\prod_{a\in A\setminus\{i\}}\frac{1}{h_{aj}-1}\prod_{b\in B\setminus\{j\}}\frac{1}{h_{ib}-1}\tag{1}$$

Pour voir que l'énoncé est raisonnable, considérons le cas où $b_0=j$. Là, le deuxième produit est vide (et donc nous l'interpretons comme 1). Pour que la projection horizontale soit $a_0,\ldots,a_k$, il faut qu'on s'est déplacé de $(a_0,j)$ à $(a_1,j)$ à $\ldots$à $(a_k,j)=(i,j)$. A chaque fois, il y avait exactement un choix qui marchait dans l'équerre, et donc la probabilité était

$$\frac{1}{h_{a_0j}-1}\frac{1}{h_{a_1j}-1}\cdots\frac{1}{h_{a_{k-1j}-1}}$$

C'est exactement ce que donne la formule.

*Démonstration.* Le premier pas doit nous emmener soit à $(a_0, b_1)$, soit à $(a_1, b_0)$. Chacun a la probabilité $\frac{1}{h_{a_0b_0}-1}$. La probabilité de continuer de la façon voulue à partir de $(a_0, b_1)$ est $p_{A,B\setminus\{b_0\}}$. La probabilité de continuer de la façon voulue à partir de $(a_1, b_0)$ est $p_{A\setminus\{a_0\},B}$. Donc

$$p_{A,B} = \frac{1}{h_{a_0b_0}-1}(p_{A,B\setminus\{b_0\}} + p_{A\setminus\{a\},B})$$

Par recurrence, nous pouvons supposer que

$$p_{A,B\setminus\{b_0\}} = (h_{ib_0}-1)\mathrm{RHS}(1)$$
$$p_{A\setminus\{a_0\},B} = (h_{a_0j}-1)RHS(1)$$

Donc

$$p_{A,B} = \frac{h_{ib_0}+h_{a_0j}}{h_{a_0b_0}-1}\mathrm{RHS}(1)$$

Finalement, il faut vérifier que $h_{a_0b_0} = h_{ib_1} + h_{a_1j}$. Il faut just dessiner les trois équerres et c'est évident. Le lemme est démontré. $\square$

Finissons la démonstration du théorème. La probabilité qu'on a fini à $(i, j)$ est la somme de toutes les sous-ensembles possibles $A, B$ avec $A$ un ensemble avec maximum $i$, et $B$ un sous-ensemble ayant maximum $j$, fois $1/n$ (parce qu'au départ, on a dû avoir choisi $(a_0, b_0)$.

Par le lemme, la probabilité de finir à $(i, j)$ est

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{A,B} p_{A,B} &= \frac{1}{n}\sum_{A,B}\prod\prod_{a\in A\setminus\{i\}}\frac{1}{h_{aj}-1}\prod_{b\in B\setminus\{j\}}\frac{1}{h_{ib}-1}\\ &= \frac{1}{n}\prod_{1\le a<i}\frac{h_{aj}}{h_{aj}-1}\prod_{1\le b<j}\frac{h_{ib}}{h_{ib}-1}\end{aligned}$$

C'est ce qu'on appelait $F_i/F$.