COURS 20

Version du 15 avril 2025.

Rappel. La dernière fois, nous avons démontré que deux tableaux sont jeu de taquin équivalents si et seulement si ils ont la même rectification (ce qui revient à montrer que $P(\mathrm{mot}(S)) = P(\mathrm{mot}(T))$).

J'ai mentionné le fait que deux tableaux de la même forme S et T sont dual équivalents si et seulement si $Q(\mathrm{mot}(S)) = Q(\mathrm{mot}(T))$. C'est un des sens dans lequel l'équivalence jdt et l'équivalence duale sont effectivement duales.

J'ai introduit les relations de Knuth, qui expriment l'équivalence jeu de taquin en termes du mot de lecture. Deux mots sont jeu de taquin équivalents si on peut transformer l'un dans l'autre par une suite de transformations de Knuth élémentaires. Celles-ci sont, pour $x < y < z$, remplacer un sous mots yxz par yzx, ou vice versa, ou bien remplacer xzy par xzy ou vice versa.

S et T sont jeu de taquin équivalents si et seulement si leurs mots de lectures sont Knuth équivalents.

La dernière fois j'ai énoncé le théorème de Greene. Aujourd'hui, nous allons le démontrer, en utilisant les relations de Knuth. Nous allons revoir l'énoncé prochainement, mais en premier je vais donner une proposition qui nous aidera à le démontrer.

3.6. **Théorème de Greene.** Pour λ une partition, écrivons λ^t pour le transposé de λ. On réfléchit son diagramme de Ferrers autour de la ligne $y = x$. Autrment di, les tailles des parties de λ^t sont les tailles des *colonnes* de λ.

Pour $\pi = \pi(1) \ldots \pi(n)$ une permutation (ou plus généralement un mot) on écrira $\overline{\pi} = \pi(n) \ldots \pi(1)$ pour π écrit à l'envers. (Remarquons que ce n'est pas la même chose que l'inverse de π comme permutation, que l'on écrit π^{-1}.)

Proposition 3.6.1. *Pour π une permutation, si la forme de $P(\pi), Q(\pi)$ est λ, alors la forme de $P(\overline{\pi}), Q(\overline{\pi})$ est λ^t.*

Démonstration. Nous pouvons calculer $\mathrm{RSK}(\pi)$ par jeu de taquin à partir du tableau diagonal. Pour calculer $\mathrm{RSK}(\overline{\pi})$, on peut faire exactement la même procédure, après une réflexion dans la ligne $y = x$. $\square$

Théorème 3.6.1. *Soit π une permutation, dont l'insertion est de forme λ. Alors la taille du plus grand sous-ensemble des entrées de π qui peut être exprimé comme réunion de k suites croissantes est $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k$. Pour les suites décroissantes, on fait la même chose avec les colonnes de λ*

Démonstration. Premièrement, remarquons que nous pouvons nous restreindre au cas croissant, en utilisant la proposition précédente.

La façon que nous allons démontrer ce cas est la suivante. Nous considérons l'équivalence de jeu de taquin comme une relation d'équivalence sur les permutations (où on voit les permutations comme des tableaux diagonaux). Nous allons prendre une permutation particulière dans chaque classe d'équivalence, et nous allons démontrer l'énoncé pour cette permutation. Ensuite, nous allons démontrer que l'énoncé reste vrai si on prend une différente permutation dans la classe d'équivalence. Pour cette deuxième étape, il suffit de montrer que si une permutation pour laquelle l'énoncé est vrai est changé par une seule relation de Knuth, alors il reste vrai.

Donc, pour commencer, quelle permutation prendre ? Bon, la classe d'équivalence peut être définie comme les permutations ayant la même rectification, donc on pourrait commencer avec le mot qui correspond à la rectification.

Considérons par exemple le tableau : $\begin{array}{lllll} 7 & & & & \\ 2 & 4 & 9 & & \\ 1 & 3 & 5 & 6 & 8 \end{array}$

Son mot de lecture est 724913568. La plus longue suite croissante est censé être de longueur cinq. Il y a plusieurs options, mais 13568 en est une. De façon similaire, la réunion des deux dernières lignes est évidemment la réunion de deux sous-suites croissantes, et selon le théorème, elle est de taille maximale.

En général, si S est un tableau standard, les k dernières lignes sont la réunion de k sous-suites croissantes (ces lignes), et sont de la taille voulue. Il faut juste vérifier qu'il est impossible qu'il y ait un sous-mot plus grand qui serait encore la réunion de k suites croissantes.

Pour ce faire, remarquons que les colonnes de S forment, elles, des suites décroissantes dans $\text{mot}(S)$. L'intersection d'une suite croissante et d'une suite décroissante ne peut être de taille supérieure à 1. Donc, dans chaque colonne, le nombre de cases qui peuvent contribuer à la réunion de k suites croissantes est le min de la taille de la colonne et k. Mais c'est exactement le nombre de cases dans les k premières lignes. L'énoncé est démontré pour le mot de lecture d'un tableau droit standard.

Maintenant, il faut démontrer que si l'énoncé est vrai pour une permutation π, il est également vrai pour une permutation que l'on obtient à partir de π en appliquant une relation de Knuth.

Supposons que, pour $x < y < z$, on a $\pi = \dots zxy \dots$ et $\sigma = \dots xzy \dots$. Nous voulons démontrer que la taille maximale de la réunion de k sous-mots croissants est aussi grand dans σ que dans π. Là, c'est vraiment très simple. Considérons par exemple $\pi = 52\mathbf{413}6$ et $\sigma = 52\mathbf{143}6$. Un sous-mot croissant de π de taille maximale est 136. Et dans σ, on a aussi 136 qui marche. Pourquoi ? Bon, la différene c'est que maintenant 4 et 1 sont inversés. Mais aucune sous-mot croissant n'utilisait à la fois 4 et 1 dans π, parce que dans π ils sont dans le mauvais ordre. Et ça marche de la même manière si on considérait la réunion de plusieurs sous-mots au lieu d'un seul.

Maintenant, démontrons que la taille maximale de la réunion de k sous-mots croissants de π est aussi grande que celle de σ. Dans notre exemple, le problème serait si on utilisait 14 dans un sous-mot croissant de σ. Par exemple, mettons qu'on avait choisi comme la plus longue sous-mot croissante dans σ, 146. Ce n'est plus croissant dans π. Mais rappelons que nous savons que 14 est suivi de 3, et le 3 est inférieur à 4, mais toujours supérieur à 1. Il s'ensuit donc qu'on peut remplacer le 4 dans notre sous-mot choisi, par le 3, sans causer de problème.

Ça marche super bien... sauf dans le cas où on utilisait déjà le 3 dans une autre sous-mot croissant !

Par exemple, supposons qu'on avait choisi 23 et 146 comme nos sous-mots croissants de σ. Je ne peux pas juste remplacer le 4 par le 3, parce que nous avons déjà besoin du 3. Mais ce que nous pouvons faire, c'est nous pouvons échanger le 3 et le 4. Dans notre exemple, ça marche. Mais considérons

$$\sigma = 62\mathbf{153}47 \qquad \pi = 62\mathbf{513}47$$

(La différence maintenant c'est l'échange du 1 et 5.) Supposons que, pour σ, nous ayons choisi 234 et 157. Pour π, si on essaye d'échanger le 5 et le 3, ça ne marche pas, car nos sous-mots ne sont plus croissants. Mais nous pouvons échanger les deux partie finales (dans notre exemple, 34 et 57), sans jamais avoir de problème. Donc les tailles de la réunion de k sous-mots croissants de σ et de τ sont les mêmes.

Il reste l'autre relation de Knuth pour laquelle il faut démontrer que ça ne change pas la taille maximale de la réunion de k sous-mots croissants. L'argument est très similaire, et je ne compte pas le donner. (Il faut échanger la partie initiale au lieu de la partie finale.) $\square$