Rappel

Deux tableaux S, T sont jdt équiv. si et seulement si

$$P(\text{mot } S) = P(\text{mot } T)$$

L'équivalence duale de S et T

$$Q(\text{mot } S) = Q(\text{mot } T)$$ (S et T doivent avoir la même forme)

Deux mots sont Knuth équivalents s'il y a une suite de changements élémentaires qui nous permettent de passer de l'un à l'autre.

changements élémentaires

$x < \underline{y} < z$ $\qquad zxy \longleftrightarrow xzy$

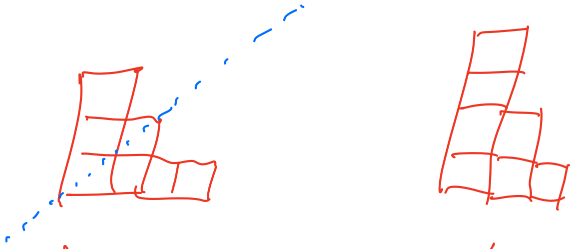
$\qquad yzx \longleftrightarrow yxz$

S et T sont jdt équivalents $\Longleftrightarrow$

$$\text{mot}(S) \underset{K}{\sim} \text{mot}(T).$$

3.6 Théorème de Greene

$\lambda \vdash n$ nous écrivons λ^t pour le transposé de λ



$\lambda = 4,2,1$ $\qquad$ $\lambda^t = 3,2,1,1$

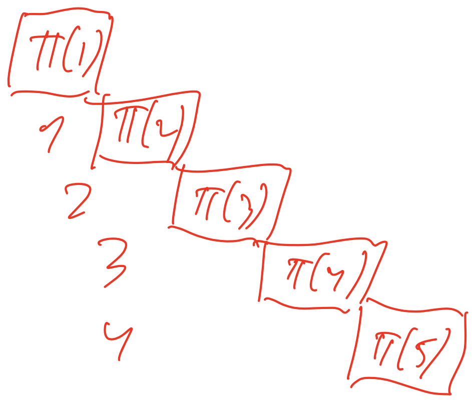
Les tailles des lignes de λ^t sont les tailles des colonnes de λ.

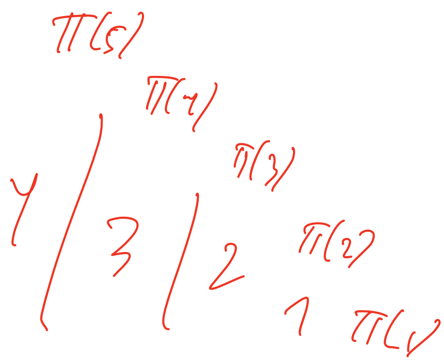
π une permutation $\bar{\pi}$ par la permutation écrite à l'envers.

$\pi = \underline{3412}$ $\qquad$ $\bar{\pi} = 2143$

Proposition : π une permutation, si la forme de $P(\pi)$, $Q(\pi)$ est λ, alors la forme de $P(\bar{\pi})$, $Q(\bar{\pi})$ est λ^t.

Démonstration





1
2
4
3

1 2
4
3

1 2 4
3

4
1 2 3

3
4
2
1

3
4
2
1

3
4
2
1

3
2
1 4

Effectivement $P(\bar{\pi}) = P(\pi)^t$

$Q(\bar{\pi}) = Q(\pi)^t$.

Théorème Soit π une permutation, dont l'insertion est de forme λ. Alors la taille du plus grand sous-ensemble des entrées de π qui peut être exprimé comme réunion de k suites croissantes est $\lambda_1 + \dots + \lambda_k$.
Pour les suites <u>décroissantes</u> on fait la même chose avec les colonnes.

Démonstration. Les cas croissants et décroissants sont équivalents par la prop. donc il suffit de considérer le cas croissant.

5 1 3 2 4

5
3
1 2 4

On va regrouper les permutations selon leurs classes d'équivalence jdt. Pour une certaine permutation dans chaque classe d'équivalence, nous allons démontrer l'énoncé.
Puis, nous allons démontrer que si l'énoncé est vérifié pour

π, et si $\pi \underset{K}{\sim} \sigma$, alors l'énoncé est également vérifié par σ.

Commençons. Je prends une classe d'équivalence de permutations. Elles ont toutes la même rectification.

$P(\pi)$ déterminé.

Une permutation dans la classe d'équivalence est mot $P(\pi)$.

Tableau :

$$\begin{array}{lllll} 7 & & & & \\ 2 & 4 & 9 & & \\ 1 & 3 & 5 & 6 & 8 \end{array}$$

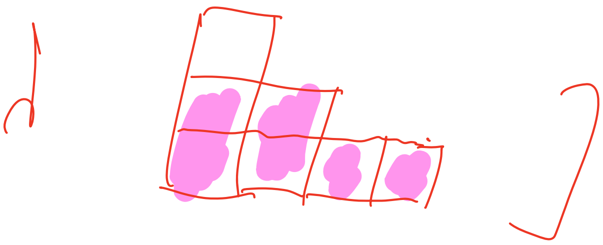
π : $7\,2\,4\,9\,1\,3\,5\,6\,8$

Il suffit de prendre des lignes pour obtenir des suites croissantes des tailles voulues.

Pourquoi est-ce qu'il n'y a pas de sous-mot composé de k sous-mots croissants plus long.

En prenant k sous-mots croissants, je ne peux pas utiliser plus que k lettres tirées d'une même colonne. Donc, le nombre d'entrées que je peux utiliser dans un colonne est le min de k et la taille de la colonne.

$k=2$



$d_1 + d_2$.

Maintenant il faut montrer que si π et σ diffèrent par une relation élémentaire de Knuth ça ne change pas la taille maximale d'une collection de k sous-mots.

Supposons que $x<y<z$ $\quad \pi = \ldots zxy \ldots$

$\sigma = \ldots xzy \ldots$

Premièrement, montrons que la taille maximale de k sousmots croissants est aussi grande dans σ que dans π.

Exemple: π : 524136

σ : 521436

sousmot croissant de π de taille maximale :
136

le même sousmot marche pour σ.

Dans σ c'est plus facile d'être croissant.

Le même mot pour π va toujours marcher pour σ.

Maintenant, démontrons que la taille est aussi grande dans π que dans σ.

$\pi = 52\underline{41}36$ $\sigma = 52\underline{14}36$

un sousmot de σ de longueur max. est 146

π ne contient pas 146 comme sousmot.

Mais π contient 136. (Je remplace le z par le y)

Super. Ça marche sauf si...
le "y" (3) est déjà utilisé
dans un sous mot croissant différent.

$\sigma \qquad \ldots x\,z\,y \ldots$

$\pi \qquad \ldots z\,x\,y \ldots$

$\sigma = 6\,2\,1\,5\,3\,4\,7$

$\pi = 6\,2\,5\,1\,3\,4\,7$

au lieu de simplement dire : j'échange le z et le y, il faut échanger les continuation des deux suites

Pour l'autre relation de Knuth

$\ldots y\,x\,z \ldots \sim y\,z\,x$

même chose mais il faut échanger les parties initiales.