COURS 2

Version du 17 février 2025.

2. Théorie des graphes

Je suis ici le chapitre 3 de Modern Graph Theory, de Béla Bollobás.

2.1. **Flots dans un graphe.** Soit G un graphe orienté fini. Nous désignons deux sommets particuliers, s et b, pour *source* et *but*. Un *flot* dans G est une fonction f des flèches de G vers les réels non négatifs, tel que, à chaque sommet $v \neq s, b$, on a

$$\sum_{\xrightarrow{e} v} f(e) = \sum_{v \xrightarrow{e}} f(e).$$

L'idée est que f indique combien d'eau, d'électricité, etc., utilise la flèche e, et qu'il n'est pas permis d'avoir des fuites (ou des ajouts) sauf à s, b. On va parler de $f(e)$ comme le courant qu'assigne f à e. On écrit $\mathcal{F}(G)$ pour les flots dans G.

Il s'ensuit que le courant (net) qui entre à s doit sortir à b :

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{\xrightarrow{e}} f(e) - \sum_{\xrightarrow{e}} f(e) \\
&= \sum_{v} \sum_{\xrightarrow{e} v} f(e) - \sum_{v} \sum_{v \xrightarrow{e}} f(e) \\
&= \sum_{y \xrightarrow{e} b} f(e) - \sum_{b \xrightarrow{e} y} f(e) - \sum_{s \xrightarrow{e} y} f(e) + \sum_{y \xrightarrow{e} s} f(e)
\end{aligned}$$

Et donc :

$$\sum_{y \xrightarrow{e} b} f(e) - \sum_{b \xrightarrow{e} y} f(e) = \sum_{s \xrightarrow{e} y} f(e) - \sum_{y \xrightarrow{e} s} f(e)$$

(Remarquons qu'il peut y avoir des flèches qui vont vers s ou des flèches qui sortent de b. Si ce n'est pas le cas, deux des sommes disaparaissent.) On cette quantité le *flux net* de f. On écrit $\mathcal{F}_m(G)$ pour les flots de flux net m.

2.2. **Polytope de flots.** (Pour cette sous-section, on peut regarder les travaux de Yip, Morales, ...)

Supposons que G un graphe orienté sans cycles orientés.

Théorème 2.2.1. *$\mathcal{F}_m(G)$ est un polytope.*

Qu'est-ce que cela veut dire : simplement que $\mathcal{F}_m(G) \subseteq \mathbb{R}^E$, E étant l'ensemble des flèches, et il y a un nombre fini de flots, $f_1, \ldots, f_r$, tel que $\mathcal{F}_m(G)$ est l'envelope convexe de $f_1, \ldots, f_r$. Plus précisément encore, ça veut dire que $f \in \mathcal{F}_m(G)$ si et seulement si $f = a_1 f_1 + \cdots + a_r f_r$, pour $a_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \sum_i a_i = 1$.

Comment trouver ces f_i ?

On appelle *route* une suite de flèches qui mènent de s vers b. Un exemple d'un flot dans $\mathcal{F}_1(G)$ est de donner le poids 1 à chaque flèche dans la route, et 0 ailleurs. Puisque G est fini et n'a pas de cycles orientés, il y a un nombre fini de routes. On peut prendre m fois les flots associées aux routes pour les f_i.

Démonstration. La démonstration se fait par récurrence sur le nombre de flèches de G. Soit $f \in \mathcal{F}_m(G)$. Choisissons une flèche avec le poids minimal positif, disons $x \xrightarrow{e} y$. Nous allons maintenant trouver une route qui passe par e, et dont tous les flèches ont une valeur non nulle, et donc supérieur ou égal à $f(e)$. Il suffit de remarquer que si $f(e)$ entre dans y, il doit aussi sortir, donc il y a une flèche qui part de y avec un poids non nul. On continue comme ça et, puisqu'il n'y a pas de cycles orientés, on arrive forcément à b. On fait la même chose à l'envers pour continuer la route à l'envers jusqu'à s. Nous avons maintenant une route qui passe par e, et où toutes les flèches ont un poids supérieur ou égal à $f(e)$. Soit f_1 le flot dans $\mathcal{F}_1(G)$ qui correspond à cette route. Alors $f - f(e)f_1$ est un flot dans $\mathcal{F}_{m-f(e)}(G-e)$, qui utilise moins de flèches. Nous pouvons donc exprimer :

$$f - f(e)f_1 = (m - f(e))(b_1 g_1 + \cdots + b_s g_s)$$

où $g_1, \ldots, g_s$ sont les flots qui correspondent aux routes dans $G - e$ (qui sont également des routes dans G), où $b_i \geq 0, \sum b_i = 1$

Alors :

$$\begin{aligned} f &= f(e)f_1 + (b_1(m - f(e))g_1 + \cdots + b_s(m - f(e))g_s) \\ &= (f(e)/m)mf_1 + b_1((m - f(e))/m)mg_1 + \ldots b_s((m - f(e))/m)mg_s \end{aligned}$$

Il faut vérifier que $f(e)/m + sum(b_i(m - f(e))/m) = 1$. Ça découle directement du fait que $\sum_i b_i = 1$. $\square$

2.3. **Flots dans un graphe avec des capacités sur les flèches.** G est encore orienté, et peut de nouveau avoir des cycles orientés.

Pour chaque flèche e, nous supposons maintenant qu'elle a une capacité $c(e)$, et nous cherchons à comprendre les flots tels que $0 \leq f(e) \leq c(e)$.

Pour des ensembles de sommets X, Y, écrivons $E(X,Y)$ pour les flèches qui vont d'un sommet dans X vers un sommet dans Y.

Pour n'importe quelle fonction g sur les flèches, nous allons écrire $g(X,Y)$ pour $\sum_{e \in E(X,Y)} g(e)$.

Si S est un sous-ensemble des sommets contenant s mais pas b, écrivons $\overline{S}$ pour le complémentaire de S, et appelons $E(S,\overline{S})$ une coupure. Si on enlève les flèches d'une coupure de G, il n'y a plus de flots non nuls. Et inversement, un ensemble K de flèches ayant la propriété que $G \setminus K$ n'a plus de flots, contient forcément une coupure. (On peut définir S comme l'ensemble des sommets accessibles par une série de flèches à partir de s.)

Lemme 2.3.1. *Le flux net d'un flot peut être calculé comme $f(S,\overline{S}) - f(\overline{S},S)$.*

Il s'agit d'une généralisation du fait que le flux net est la somme du courant qui sort de s moins ce qui arrive à s (où $S = \{s\}$) et du fait que c'est ce qui entre à b moins ce qui part de b (où $S = V(G) \setminus \{b\}$).

Démonstration. La démonstration est presque la même.

$$\begin{aligned} m &= \sum_{s \xrightarrow{e}} f(e) - \sum_{\xrightarrow{e} s} f(e) \\ &= \sum_{v \in S, v \xrightarrow{e}} f(e) - \sum_{v \in S, \xrightarrow{e} v} f(e) \\ &= \sum_{v \in S, w \in \overline{S}, v \xrightarrow{e} w} f(e) - \sum_{v \in S, w \in \overline{S}, w \xrightarrow{e} v} f(e) \end{aligned}$$

□

Il s'ensuit que $c(S,\overline{S})$ pour n'importe quelle coupure, borne le flux net de n'importe quelle flot. Puisqu'il y a un nombre fini de coupures, il y a une coupure minimale.

Théorème 2.3.1 (Théorème de Ford–Fulkerson, dit « max flow min cut »)**.** *Le flux net maximal d'un flot dans un graphe G avec capacités données par c, est égale à la capacité minimale d'une coupure.*