COURS 19

Version du 15 avril 2025.

Rappel. La dernière fois, j'ai démontré que si S et T ont le même mot de lecture, ils sont jeu de taquin équivalents.

Nous avons analysé les équivalences duales de taille 3. Un tableau ayant mot de lecture 132 est dual équivalent à celui de la même forme et mot de lecture 231 ; un tableaux ayant mot de lecture 312 est dual équivalent à celui de la même forme et mot de lecture 213.

Ça nous permet de trouver beaucoup d'autres paires de tableaux qui sont dual équivalents : si on prend deux tableaux dual équivalents, on peut ajouter le même tableau "après" les deux (ou "avant" les deux) pour obtenir d'autres tableaux dual équivalents.

En utilisant ces équivalences duales, nous avons pu démontrer que si S et T sont de la même forme droite, ils sont dual équivalents.

Nous avons vu une façon différente de concevoir la rectification. La rectification de S de forme λ/mu est déterminé par un tableau standard T de forme μ. Ce que nous avons vu c'est que rectifier S par T, c'est la même chose que "dérectifier" T en utilisant S (c'est-à-dire, faire les glissements inverses dans le 1 de S, le 2 de S, et ainsi de suite, et placer les entrées de S dans les cases qui sont vidées).

Maintenant, l'équivalence duale de T et T' implique que la rectification (conçue de cette autre façon) procédera d'exactement la même manière peu importe si on utilise T ou T'. Le théorème fondamental du jeu de taquin est démontré.

3.4. **Équvalence duale, *suite*.**

3.4.7. *Deux tableaux sont jeu de taquin équivalents si et seulement si ils ont la même rectification.* Si S et T ont la même rectification, alors évidemment ils sont jeu de taquin équivalents. Inversement, supposons que S et T sont jeu de taquin équivalents. Ça veut dire qu'il y a une suite $S = X_0, X_1, \ldots, X_r = T$ où X_i et X_{i+1} sont reliés par un glissement de jeu de taquin (dans un sens ou l'autre). Il suffit de démontrer que chacun des X_i a la même rectification. Supposons que c'est un glissement classique qui va de X_{i+1} vers X_i. Alors en rectifiant X_{i+1} en commençant par ce glissement, on arrive à X_i, et en donc les rectifications sont les mêmes.

3.5. **Relations de Knuth.** Nous continuons de travailler avec les tableaux standards (ou, plus généralement, avec des tableaux où il n'y a pas de répétition).

Nous avons vu la dernière fois que si deux tableaux ont le même mot de lecture, ils sont jeu de taquin équivalents. Mais comment caractériser les mots de lecture qui sont jeu de taquin équivalents ? La réponse est : les relations de Knuth. Soit $x < y < z$. Si deux mots diffèrent puisque l'un a yxz et l'autre yzx, nous disons qu'ils sont reliés par une relation de Knuth du premier type, et si l'un a xzy et l'autre a zxy, nous disons qu'ils sont reliés par une relation de Knuth du deuxième type.

Théorème 3.5.1. *T et S sont jeu de taquin équivalents si et seulement si leurs mots de lectures sont reliés par une suite de relations de Knuth.*

Démonstration. Que T et S soient jeu de taquin équivalents revient à dire que les mots de lecture de T et de S, écrits sur la diagonale nord-ouest – sud-est sont jeu de taquin équivalents, et par le résultat de 3.4.7 ci-haut, ça revient à dire qu'ils on la même rectification.

Pour démontrer un sens du théorème, il suffit donc de montrer que si deux mots sont reliés par une relation de Knuth, ils auront la même rectification. C'est évident : il faut just commencer la rectification avec les trois lettres où intervient la relation de Knuth ; on voit bien qu'à partir de la, la rectification sera la même.

Pour démontrer l'autre sens, on suppose que T et S sont jeu de taquin équivalents, et comme nous avons déjà dit, ça implique que les tableaux diagonaux formés des mots de S et de T auront la même rectification. Ces rectifications, on peut les calculer en utilisant l'insertion. Il est donc suffisant de montrer que si T est un tableau, et x une lettre, le mot de T suivi par x est Knuth équivalent à l'insertion de x dans T.

Supposons que la première ligne de U soit $p_1, \dots, p_r$. Et supposons que x va tasser p_i, car $p_{i-1} < x < p_i$. Alors, les relations de Knuth du premier type nous permettent de passer de $p_1 \dots p_r x$ à $p_1 \dots p_i x p_{i+1} \dots p_r$. Maintenant, les relations de Knuth du deuxième type nous permettent de faire passer le p_i avant $p_1, \dots, p_{i-1}$. Maintenant, le même argument nous permet de modéliser l'action de l'insertion de p_i dans la deuxième ligne en utilisant les relations de Knuth, et ainsi de suite. □

3.6. **Théorème de Greene.**

Théorème 3.6.1. *Soit π une permutation, dont l'insertion est de forme λ. Alors le plus grand sous-ensemble des entrées de π qui peut être exprimé comme réunion de k suites croissantes est $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k$. Pour les suites décroissantes, on fait la même chose avec les colonnes de λ*