COURS 18

Version du 27 mars 2025.

Rappel. La dernière fois, nous avons revu certaines des notions qui avaient déjà été introduites, car il semblait que celles-ci n'étaient pas tout à fait claires pour tout le monde.

Nous avons parlé du fait qu'on peut calculer $P(\pi)$ en utilisant le jeu de taquin (car le jeu de taquin peut calculer l'insertion). J'ai ajouté cette discussion dans les notes du cour 16, parce qu'ils sont plus à leur place là.

J'ai mentionné que si $P(\pi)$ et $Q(\pi)$ sont de forme λ, alors λ_1 est la longueur de la plus grande sous-suite croissante de π, et la longueur de la première colonne est la longueur de la plus grande sous-suite décroissante. Les démonstrations viendront. Ça aussi, j'ai ajouté aux notes du cours 16.

J'ai introduit le "glissement jeu de taquin inverse."

J'ai introduit la notion de "jeu de taquin équivalence." Deux tableaux sont jeu de taquin équivalents si on peut transformer l'un dans l'autre en appliquant une suite de glissements (permis) et de glissements inverses (permis).

Nous avons regardé le cas des tableaux de taille deux. On peut distinguer les classes de jeu de taquin équivalence en regardant le "mot de lecture" (on lit les entrées comme on lit un texte en français).

La question a été soulevée la dernière fois : est-ce que deux tableaux ayant le même mot de lecture sont jeu de taquin équivalents ? La réponse est oui. Soit T un tableau. En appliquant des glissments, on peut séparer les lignes de T, de telle sorte qu'elles deviennent comme les marches d'un escalier (une ligne verticale n'intersecte qu'une seule marche). Ensuite, on peut introduire une séparation entre les marches. On peut maintenant incliner chacune des "marches" pourqu'elle devient diagonale. Au finale, on a converti T à un tableau de forme diagonale, avec le mot de lecture écrit dans les cases du nord-ouest au sud-est. Puisqu'on peut le faire pour n'importe quel T avec le même mot de lecture, on peut convertir T à n'importe quel autre tableau ayant le même mot de lecture. (Je souligne que l'inverse est faux : le jeu de taquin peut changer le mot de lecture, si la taille du tableau est supérieure à deux.)

Nous avons commencé l'étude des tableaux dual équivalents. (Attention : il y a maintenant deux notions différentes d'équivalence, l'équivalence jeu de taquin et l'équivalence duale. Il ne faut pas les mélanger.) Deux tableaux standards S, T sont dits "dual équivalents" si après n'importe quelle suite de glissements et de glissements inverses (permis), appliqués à la fois à S et à T, les deux tableaux que l'on obtient ont la même forme. Quand je dis "permis," je veux dire que si la forme est λ/μ, alors je fais un glissment jdt dans une case maximale de μ, ou bien un glissement inverse dans une case minimale du complément de λ. Et si à un moment donné, les formes deviennent différentes, alors les tableaux n'étaient pas dual équivalents, et j'arrête. Mais s'ils on toujours la même forme, les tableaux sont dual équivalents.

Il n'y a pas de tableaux dual équivalents de taille 2. Si on commençait avec deux tableaux différents de la même forme, il faudrait que le mot de lecture de l'un soit 12, et de l'autre 21. Donc, en les rectifiant, on obtient dans un cas le rectangle horizontal, et dans l'autre cas le rectangle vertical. Puisque les formes deviennent différentes, ils ne sont pas dual équivalents.

3.4. **Équivalence duale, *suite*.**

3.4.2. *Les tableaux de taille trois.* Considérons les tableaux standards de taille trois. Le mot de lecture ne change généralement pas lorsqu'on fait un glissment jdt, mais il peut changer. On se convainc qu'il change uniquement lorsque les trois cases remplies sont en forme de L ou L inversé. Lorsqu'on fait jdt là, 312 change en 132, et vice versa ; 213 change en 231 et vice versa. Puisqu'on ne peut pas avoir un mot de lecture 123 ou 321 en forme de L ou L inversé, ces mots de lecture ne changent jamais.

Maintenant réfléchissons à ce qui se passe si on a deux tableaux de la même forme ayant mot de lecture 312 ou 213. Ils gardent évidemment la même forme jusqu'au moment où il faut comparer le 2 et le 3. Pourque cela se passe, il faut qu'on ait dans une forme de L. Mais là, le fait qu'il y a aussi la case avec le 1 nous sauve ! On passe, dans les deux cas, à des tableaux de forme L inversé, avec mots de lecture respectivement 132, 213. Et le jeu continue, jusqu'au moment où il faut comparer le 1 et le 2, et la même chose se produit à l'envers : on passe de la forme "L-inversé" à la forme L.

Conclusion : un tableau ayant mot de lecture 213 est dual équivalent au tableau de la même forme avec mot de lecture 312 ; et un tableau ayant mot de lecture 132 est dual équivalent à un tableau ayant mot de lecture 231.

3.4.3. *Les équivalences duales élémentaires.* Soient S et T deux tableaux de taille trois dual équivalents, de forme λ/μ.

Soit X un tableau standard de taille p, de forme μ/ν, et soit Y un tableau standard de taille q, de forme ρ/λ.

Alors, on peut en former deux grands tableaux S', T' de taille $p+3+q$, de forme ρ/ν : on met X dans μ/ρ, on met $S+p$ ou $T+p$ dans λ/μ, et on met $Y+p+3$ dans ρ/λ.

Les tableaux S', T' sont standards.

Lemme 3.4.1. *S' et T' sont dual équivalents.*

Démonstration. Je fais agir un glissement jdt sur S' et T'. Je peux le voir comme, dans un premier temps, faire un glissement dans X (qui aura le même effet dans S' et T'), puis dans S, T (ce qui conserve la forme, car S, T sont dual équivalents), ce qui laisse une case vide à combler au le même endroit, et donc le processus se termine avec les mêmes déplacements dans Y.

L'argument pour les glissements jdt inverses est le même. □

3.4.4. *Deux tableaux droites de la même forme sont dual équivalents.* Il suffit de démontrer qu'il y a une chaine d'équivalences élémentaires qui les relie. La démonstration se fait par récurrence sur la taille. Pour les tailles 1 et 2 c'est trivialement vrais, et nous avons déjà considéré la taille trois, ou les deux remplissages de la forme $(2,1)$ sont effectivement dual équivalents, tandis qu'il n'y a qu'un seul remplissages des formes $(1,1,1)$ et (3).

Soit $\lambda \vdash n$ avec $n > 3$. Soit T, S deux tableaux standards de forme λ. Si T, S ont n dans la même case, on définit T', S' en enlevant n. Par recurrence, ces deux tableaux sont liés par une suite d'équivalences élémentaires, auxquelles il suffit de rajouter le n pour obtenir une suite d'équivalences élémentaires entre T et S.

Supposons maintenant que T, S ont n dans des cases différents, x et y. Soit z une case qui est maximale une fois qu'on a retiré x et y, et qui est entre ces deux.

Soit U un tableau avec n dans la case x, $n-1$ dans la case y, et $n-2$ dans z. Soit V le tableau avec n et $n-1$ échangés.

Maintenant, par récurrence, comme nous avons déjà vu, T et U, ayant n dans la même case, sont liés par une suite d'équivalences duales. De façon similaire, S et V sont dual équivalents. Mais U et V sont liés par une équivalence dual élémentaire. Le résultat est démontré.

3.4.5. *Deux façons différentes de rectifier.* La façon classique de rectifier un tableau standard S de forme λ/μ dépend du choix d'une suite de cases de μ, où la première est maximale, la deuxième maximale une fois la première enlevée, et ainsi de suite. On peut spécifier ce choix en utilisant un tableau standard T de forme μ ! L'entrée maximale, la taille de μ (que j'écris $|\mu|$), indique la case où commencer le premier glissement, l'entrée $|\mu| - 1$ indique la case où commencer le prochain glissment, et ainsi de suite.

Pour exécuter la rectification codée par T, on peut procéder d'une manière légèrement différente de ce qu'on a déjà vu. Effectivement, ce que je vais redéfinir est la façon de penser le glissement d'un remplissage S de λ/μ dans une case maximale de μ. Je mets une étoile dans la case maximale, et j'essaie de l'échanger, successivement, avec chaque entrée de λ/μ, en ordre de 1 à $|\lambda/\mu|$. où je n'ai le droit de les échanger que s'ils sont adjacents.

Lemme 3.4.2. *Cette description revient à la même chose que la définition classique de glissment, où à chaque fois on choisit l'entrée voisine la plus petite.*

Démonstration. Si $*$ est adjacent à a et b, avec $a < b$, les échanges avec 1 à $a-1$ ne sont pas permises, et la première échange permise est celle avec a, donc on l'exécute, et on continue. C'est exactement ce qu'on aurait fait en utilisant la définition classique. □

Maintenant, nous voyons que la rectification de S codée par T consiste à essayer d'échanger chacun des entrées de T avec chacun des entrées de S. L'intérêt c'est que ce n'est pas nécessaire de les faire selon l'ordre initialement prévu. Si on suit l'ordre qui correspond à la définition classique, dans un premier temps, on échange le $|\mu|$ dans T avec les éléments de S en ordre, puiss le $|\mu| - 1$ de T avec les éléments de S, et ainsi de suite. Mais pour savoir ce qui va se passer à le 1 de S, il suffit de l'échanger avec chacun des éléments de T en ordre (décroissant). Ensuite, pour savoir ce qui se passera au 2, il faut l'échanger avec chacun des éléments de T. Et ainsi de suite.

(Effectivement, on peut faire quelque chose d'encore plus général : il suffit de s'assurer qu'avant d'essayer d'échanger s dans S et T dans T, on a déjà fait les échanges de tous les autres $s' \in S$ et $t' \in T$ avec $s' \leq s$ et $t' \leq t$.)

3.4.6. *Théorème fondamentale du jeu de taquin.* Supposons que nous ayons un tableau standard S de forme gauche λ/μ. En choisissant un remplissage standard T de forme μ, nous spécifions une façon de faire la rectification de S. Mais, en utilisant les résultats de la dernière sous-section, au lieu de, dans un premier temps faire le glissment dans $|\mu|$, puis dans $|\mu| - 1$, etc, nous arrivons au même résultat si nous faisons premièrement un glissement inverse de T vers le 1 dans S, puis un glissement inverse de T vers le 2 de S, et ainsi de suite. Soient T, T' deux remplissages différents de μ. Parce que T, T' sont dual équivalents, leur forme évoluera de la même manière lorsqu'on fait cela. Mais ça veut dire exactement que les endroits où il faudra placer le 1 de S, le 2 de S, et ainsi de suite dans la rectification, sont les mêmes si on utilise T ou T'. La rectification est donc bien définie !