COURS 16

Version du 27 mars 2025.

Rappel. La dernière fois, nous avons parlé encore un peu de la question de la borne supérieure sur le nombre d'offres faites en moyenne par l'algorithme Gale-Shapley.

Nous avons aussi analysé le problème du collectionneur des vignettes (ou « coupons »), ce qui était une étape nécessaire pour l'analyse.

Nous avons commencé à regarder les tableaux. J'ai défini les diagrammes de Ferrers, les tableaux standards, semi-standards, et croissants.

J'ai introduit la correspondance de Robinson–Schensted, qui nous permet de passer des permutations de $\{1, \ldots, n\}$ aux paires de tableaux standards, de la même forme, de taille n.

À partir d'un permutation π, on définit un tableau P ("tableau d'insertion") par un processus d'insertion de $\pi(1)$, $\pi(2)$, ... On définit Q ("tableau d'enregistrement") qui enregistre la croissance de P.

Nous avons également vu qu'à partir de (P, Q), il est possible d'inverser le processus d'insertion pour déduire quelle était la permutation, ce qui fait que l'application définie par l'algorithme est bijective.

3.2. **Correspondance de Robinson–Schensted, *suite*.** À partir de la correspondance, on déduit :

$$\sum_{\lambda \vdash n} f_\lambda^2 = n!,$$

où on écrit f_λ (notation standard) pour le nombre de tableaux standards de forme λ.

(La formule pour f_λ est appelée la formule des longueurs des équerres (« hook length formula »). Pour chaque boîte de λ, on considère l'équerre, qui est composée de la case elle-même, toutes les cases à droite dans la même ligne, et toutes les cases plus hautes dans la même colonne. Alors $f_\lambda = n!/$le produit des longueurs des équerres.

3.2.1. *Interprétation de la forme de $P(\pi), Q(\pi)$.* Si $P(\pi)$ et $Q(\pi)$ sont de forme λ, alors λ_1 est la longueur de la plus grande sous-suite croissante de π, et la longueur de la première colonne est la longueur de la plus grande sous-suite décroissante. Les démonstrations viendront.

3.2.2. *Variante : on remplace les permutations de* $\{1, \ldots, n\}$ *par les mots sur l'alphabète* $\{1, \ldots, n\}$*.* Qu'est-ce qui va se passer si on remplace la permutation par un mot quelconque ? Tout se passe de la même manière ! Sauf que le tableau P est maintenant semi-standard. On doit être clair sur les règles : lorsqu'on insère i, l'élément qu'on va tasser (au besoin) est le plus petit élément strictement supérieur à i.

Théorème 3.2.1. *La correspondance de Robinson–Schensted définit une bijection entre les mots de longueur* m *sur l'alphabète* $\{1, \ldots, n\}$ *et les paires de tableaux* (P, Q) *de la même forme* $\lambda \vdash m$*, où* P *est semistandard et* Q *est standard.*

3.3. **Jeu de taquin.** Définition de jeu de taquin. On commence avec un tableau gauche semistandard de forme λ/μ. On choisit une case maximalement nord-est de μ. Ça veut dire que c'est une case qu'on peut enlever de μ pour produire de nouveau une forme droite.

On y déplace le plus petit des entrées voisines, et on répète jusqu'à ce que la case vide est maximale dans λ. Si les deux entrées sont égales, on préfère le voisin d'en haut au voisin d'à droite. (Sinon, on briserait la définition de tableau semistandard.)

La rectification d'un tableau gauche est le résultat de faire des glissements jusqu'à ce que la forme est droite.

Théorème 3.3.1. *La rectification d'un tableau gauche semistandard ne dépend pas de la suite de glissements choisie.*

Nous allons bientôt voir la démonstration, mais pas aujourd'hui.

Cette idée de rectification nous permet de donner une différente interprétation de l'insertion que nous avons vue la dernière fois.

Proposition 3.3.1. *Il est équivalent d'insérer* x *dans* T*, ou de faire la chose suivante : on déplace* T *d'un cran vers le haut, on ajoute* x *sur la première ligne, à droite de* T*, et on rectifie.*

Remarquons que le théorème n'est pas pertinent, car il n'y a pas de choix pour comment faire le jeu de taquin.

La démonstration s'est fait au tableau (et consiste à comparer la rectification à l'insertion). J'ajouterai un exemple écrit à la main.

Il s'ensuit du fait qu'on peut calculer l'insertion en utilisant le jeu de taquin, qu'on peut déterminer le tableau d'insertion de la correspondance RSK en utilisant le jeu de taquin.

Corollaire 3.3.1. *Si* π *est une permutation, on met les entrées de* π *sur une diagonale, avec* $\pi(n)$ *en bas à droite, et* $\pi(1)$ *en haut à gauche. La rectification de ce tableau donne* $P(\pi)$*.*

Démonstration. On rectifie par lignes, ce qui produit l'effet d'insérer $\pi(1)$, puis $\pi(2)$, et ainsi de suite. Par définition, le résultat de cette suite d'insertions est $P(\pi)$. □

3.3.1. *Insertion par colonnes.* Au lieu d'insérer par lignes, on peut insérer par colonnes. Lorsqu'on insère x dans un colonne, l'élément tassé est le plus petit qui est faiblement supérieur à x. (C'est différent de la règle pour les rangées, où on tassera le plus petit élément strictement plus grand.)

Écrivons $l_x(T)$ pour le résultat d'insérer x par lignes, et $c_x(T)$ pour le résultat de l'insérer par colonnes. Alors $c_x l_y(T) = l_y c_x(T)$. Cela découle du fait que ça revient à rectifier un tableau (avec x en bas à droite et y à gauche en haut) de deux manières différentes.

3.3.2. *Produit sur les tableaux.* On peut définir un produit sur les tableaux de forme droite. Pour calculer $S * T$, on met S à gauche et au dessus de T, et puis on rectifie. Pour que cette oopération soit bien définie, il faut que nous sachions que la rectification est bien définie. Le produit est associatif, car calculer $(S * U) * T$ ou $S * (U * T)$ revient à rectifier le tableau avec S, U, T en position diagonale (du nord-ouest au sud-est) de deux manières différentes.