COURS 10

Version du 19 février 2025.

Rappel. Nous avons commencé à regarder une structure d'ordre sur les pavages par dominos d'une région F dans le plan (sans trous !). (Ordre que nous allons démontrer aujourd'hui est un treillis distributif.)

Nous colorons les carrés de F en échiquier. Nous orientons les arêtes de telle sorte qu'on suit la flèche si le carré blanc est à gauche. En suivant la flèche de v vers son voisin w, $\Delta h(v, w) = 1$, sinon $\Delta h(v, w) = -1$.

Nous définissons une hauteur pour tout sommet dans $F \cap \mathbb{Z}^2$. On choisit un sommet sur le bord, et on le donne une hauteur de zéro. Tous les autres hauteurs se calculent à partir de ce premier, en utilisant les changements d'hauteur, en suivant un chemin autorisé, c'est-à-dire qu'il passe par les bords des dominos (qui ne les coupe pas). Il fallait démontrer, bien sur, que cette hauteur était bien définie (essentiellement, c'était le lemme 2.8.1).

Nous avons aussi vu que la fonction hauteur correspondant au pavage détermine le pavage (lemme 2.8.2). Deux sommets adjacents ont un Δh de ± 3 si l'arête qui les lie coupe un domino, et ± 1 sinon, ce qui permet de reconstruire le pavage.

Ça nous permet de définir un ordre sur les pavages, avec $T > U$ si $h_T(v) \geq h_U(v)$ pour tout v dans $F \cap \mathbb{Z}^2$.

Nous avons aussi démontré que la hauteur à chaque sommet est déterminé d'avance modulo 4 (lemme 2.8.3).

2.8. **Pavage par dominos, *suite*.** Nous voulons maintenant reconnaître exactement quelles fonctions sont vraiment des fonctions hauteur.

Lemme 2.8.4. *Soit f une fonction sur les sommets de $F \cap \mathbb{Z}^2$ telle que :*
- *$f(v_0) = 0$.*
- *Pour v, w voisins, si $\Delta h(v, w) = 1$, alors $f(w) = f(v) + 1$ ou $f(w) = f(v) - 3$.*
- *Pour v, w voisins, si $\Delta h(v, w) = 1$ et l'arête suit le bord, alors $f(w) = f(v) + 1$.*

Alors il existe un pavage avec f comme sa fonction hauteur. Toute fonction hauteur vérifie ces conditions.

Démonstration. Nous avons déjà vu dans la démonstration du lemme 2.8.2 que toute fonction de hauteur vérifie ces conditions.

Si on considère les quatre pas dans le sens positif autour d'un carré, à chaque fois la valeur de f monte de 1 ou descend de trois. Il faut donc qu'on monte de 1 trois fois, et qu'on descend de trois une fois, puisque en total on arrive de nouveau à la même valeur de f du départ. La fois qu'on descend, c'est le côté du carré qui souhaite être couplé avec un autre demi-domino. Et puisqu'il en va de même pour les carrés blancs et les carrés noirs, si l'arête qui sépare deux carrés à un changement de hauteur de 3, ces deux carrés souhaitent tous les deux être un domino ensemble, et si le changement d'hauteur est de 1, ni l'un ni l'autre ne le souhaite. Le troisième point fait qu'aucun carré ne cherche à être couplé avec un carré hors de la région. Ça fait que chaque carré blanc est couplé avec un carré noir, et vice versa : nous avons notre pavage, et on voit sans difficulté que sa fonction hauteur est bien f. $\square$

Lemme 2.8.5. *Soient T, U deux pavages, avec fonctions hauter h_T, h_U. Alors $f = \min(h_T, h_U)$ et $g = \max(h_T, h_U)$ sont également des fonctions hauteur.*

Démonstration. Nous démontrons le résultat pour f ; l'argument pour g est complètement similaire. Nous le démontrons en utilisant le lemme 2.8.4. Les premier et troisième énoncés sont évidentes, car les fonctions hauteurs h_T et h_U (et n'importe quel autre fonction hauteur) s'accordent sur les bords.

Soit v, w une couple de sommets voisins avec $\Delta h(v, w) = 1$. Supposons que $h_T(v) < h_U(v)$, ce qui veut dire que $f(v) = h_T(v)$. Nous voulons démontrer qu'il est également le cas que $f(w) = h_T(w)$; puisque h_T vérifie la deuxième condition pour (v, w), c'est également le cas pour f.

Du lemme 2.8.3, il s'ensuit que $h_T(v) \leq h_U(v) - 4$. Cependant, $h_T(w) = h_T(v) + 1$ ou $h_T(v) - 3$, et $h_U(w) = h_U(v) + 1$ ou $h_U(v) - 3$. Il s'ensuit que le minimum de $h_T(w), h_U(w)$ est forcément égal à $h_T(w)$ (même s'il se peut que les deux sont égaux), et nous avons réussi.

Le cas contraire, où $h_T(v) > h_U(v)$ est identique ; on échange les rôles de T, U.

Finalement, si $h_T(v) = h_U(v)$ (qui est aussi égal à $f(v)$) on sait que $f(w) = \min h_T(w), h_U(w)$, ce qui fait que sur v, w, on a que f s'accorde avec soit h_T soit h_U (soit les deux si elles s'accordent aussi sur w). Donc encore, on sait que f vérifie la deuxième condition. On a démontré que f vérifie les conditions du lemme 2.8.4, et donc que f est une vraie fonction hauteur. $\square$

Théorème 2.8.1. *L'ordre sur les pavages de F est un treillis distributif.*

Démonstration. Il est évident que les fonctions hauteurs du lemme 2.8.5 sont forcément les fonctions hauteur du inf et du sup de T, U. Donc ces derniers existent, et l'ordre est un treillis. De plus, puisque $x \vee (y \wedge z)$ et $(x \vee y) \wedge (x \vee z)$ se calculent coordonnée par coordonné, il suffit de vérifier l'identité à un seul sommet, où il revient à la distributivité de min et max. □

On dit qu'un sommet est un minimum local (resp. maximum local) si là l'hauteur est plus grand que celui de ses quatre voisins. Si un sommet est l'un ou l'autre, nous l'appelons un extremum local.

Lemme 2.8.6. *Un sommet est un extremum local si et seulement si il est au milieu de deux dominos adjacents par leur bord long.*

(Déterminer s'il s'agit d'un max ou d'un min est facile, selon les règles pour les flips que nous avons déjà remarqués.)

Démonstration. Nous avons déjà vu que si la configuration est celui de l'énoncé, le sommet désigné est bien un extremum local.

Soit v un minimum local. Considérons les deux arêtes orientés vers v, mettons (u, v) et (w, v). On sait que les deux possibilités sont que $\Delta h(u, v) = -3$ ou 1. Mais puisque v est un minimum local, $\Delta h(u, v) = -3$, et il en va de même pour $\Delta h(w, v)$. Ça démontre que ces deux arêtes coupent chacun un domino, et v est effectivement au milieu de deux dominos adjacents par leur bord long. L'argument si v est un maximum local est presqu'identique. □

Lemme 2.8.7. *Soit T, U deux pavages, avec $T < U$. Il existe un flip de T, disons T', tel que $T' \leq U$.*

Soulignons qu'à partir de ce lemme, on voit qu'il est possible de passer de T à U par une suite de flips qui augmentent l'hauteur à chaque étape.

Corollaire 2.8.1. *Les relations de couverture dans le poset des pavages sont données par les flips.*

.

Démonstration. Nous avons déjà vu que si T et U sont reliés par un flip, l'un est plus petit que l'autre, et les fonctions hauteur sont les même, sauf à un point où leurs hauteurs diffèrent par 4. Mais puisque les hauteurs sont déterminées modulo 4, il est impossible qu'il y ait une fonction hauteur entre T et U. Donc il s'agit d'une relation de couverture. Et par le lemme (pas encore démontré), n'importe quelle relation dans l'ordre peut être factorisée comme suite de flips, ce qui démontre que les flips sont toutes les relations de couverture. □

Démontrons maintenant le lemme.

Démonstration du lemme 2.8.7. Supposons que $T < U$. Nous voulons trouver un minimum local de T tel que le flip là est toujours $\leq U$. Mais puisque le flip ne change que cette hauteur, il suffit de trouver un minimum local v de T où $h_T(v) < h_U(v)$.

Puisque $T < U$, il existe (au moins) un point w avec $h_T(w) < h_U(w)$. Mais possiblement w n'est pas un minimum local pour T. Si c'est le cas, w a un voisin w' avec $h_T(w') < h_T(w)$. Il s'ensuit que $h_U(w') < h_T(w')$ aussi. Donc de cette manière on peut continuer de chercher un minimum local. Puisque F est fini, on y arrivera finalement, et à chaque sommet sur le chemin, y compris la fin, on avait $h_T(w) < h_U(w)$, ce qui fait que le flip au sommet final reste en dessous de h_U, comme voulu. □

Échatillonage. Une question très naturelle est de chercher un pavage pris "au hasard," c'est-à-dire, uniformément. Sans les connaître tous, c'est pas évident comment le faire. Il y a une stratégie très générale.

Soit X un ensemble dont je veux tirer un élément uniformément. J'identifie un ensemble de "flips" sur X. Chaque "flip" désigne une involution de X. (Donc, dans notre cas, un "flip" serait : j'essaie de flipper à v si je le peux, sinon je ne fais rien.) On suppose que le graphe des flips sur les éléments de X est connexe.

Alors, une façon de trouver un élément de X aléatoirement c'est de commencer avec un certain $x_0 \in X$, et puis de choisir aléatoirement une suite de flips (disons uniformément, pour simplicité, même si une hypothèse plus faible suffit). Il est donc important que l'ensemble des flips est relativement petit et bien compris. Dans le cas que nous considérons, c'est l'ensembles des points de $\mathbb{Z}^2$ à l'intérieur de F.

Je ne veux pas trop entrer dans le détails de la théorie de probabilité, et spécifiquement les chaînes de Markov. Il me semble plausible que, indépendamment du x_0 pris au départ, on convergera vers une distribution de probabilité sur les points de X (c'est-à-dire, une fonction π de X vers $[0, 1]$ telle que $\sum_x \pi(x) = 1$). (Pour que ceci soit vrai, il nous faut quelques conditions assez minimes : il doit être possible de n'importe quel pavage vers n'importe quel autre par une suite de flips, et il faut que le pgdc des tailles des orbites des flips soit 1.) Cette distribution est caractérisée par la propriété que si je prends un élément de X selon cette distribution, et je choisis un flip f que j'applique, la distribution des résultats doit être la même. Plus précisément, la probabilité que j'obtienne x après avoir fait un flip c'est la probabilité que de choisir un flip f, fois la probabilité qu'avant, j'étais dans l'état $f^{-1}(x)$. Donc la distribution à laquelle on convergera vérifie :

$$\frac{1}{|\mathcal{F}|}\sum_{f\in\mathcal{F}}\pi(f^{-1}(x))=\pi(x).$$

Mais on voit que la distribution uniforme vérifie cette condition, donc ça doit être la distribution uniforme vers laquelle on procède.