COURS 1

Version du 17 février 2025.

1. Introduction

Aujourd'hui, je veux commencer avec une introduction à plusieurs des questions que je souhaite aborder dans le cours. C'est la première fois que je donne ce cours, et je n'ai pas de notes déjà écrites, donc nous pouvons facilement changer les sujets selon vos intérêts. Donc, mon but est de présenter les sujets dont je pensais parler, pour voir si vous les trouvez intéressants. Je vais faire circuler un sondage.

Pour moi, le cours se divise de façon naturelle en deux.

Une partie se situe plus dans la combinatoire des graphes, l'autre dans la combinatoire des tableaux.

1.1. **Combinatoire des tableaux.** Soit λ une partition de n. C'est-à-dire que $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$, avec $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \lambda_r$ des entier positifs, ayant somme n.

Le diagramme de Ferrers associé à λ a λ_1 cases sur la première ligne, λ_2 sur la deuxième, etc, et chaque ligne est justifiée à gauche.

Un remplissage de λ associe à chaque case du diagramme un entier positif (ou quelque chose de plus général).

Un tableau standard est un remplissage par les entiers $1, 2, \dots, n$, où chaque entier apparaît une seule fois, et les entrées sont croissantes quand on les lit de gauche à droite dans une ligne, ou d'en bas vers le haut dans une colonne.

Un tableau semi-standard est un remplissage par entiers où les lignes sont faiblement croissantes, mais les colonnes sont strictement croissants.

Il est également intéressant de considérer la différence de deux partitions. Si μ est contenu dans λ (c-à-d, $\lambda_i \geq \mu_i$ pour tout i, où les données manquantes sont considérées comme des zéros, λ/μ désigne les cases de λ privés des cases de μ. On l'appelle *diagramme gauche*, et si on veut distingues celles de forme d'une partition, on les appelle des *diagrammes droites*.

Encore, on peut considérer des remplissages standards ou semi-standards de λ/μ.

Là où ça devient sportif, c'est quand on a un remplissage de λ/μ, et on veut le convertir en remplissage d'une autre forme.

Un outil fondamental pour cela est le *jeu de taquin.* On commence avec un remplissage de λ/μ qui est standard ou semistandard. On choisit une case maximale de μ. On veut déplacer dans cette case une des entrées voisines (à droite ou au dessus). Laquelle ? Celle qui est inférieure, sinon, on est en voie de violer les conditions pour être (semi)standard. Mais maintenant, on a une vide à l'intérieur du remplissage. On répète (toujours avec une entrée à droite ou au dessus), jusqu'à ce que la case vide n'a plus de voisins au dessus ou à droite. Maintenant, on a un remplissage, encore (semi)standard, de forme λ'/μ', où λ', resp. μ', ont perdu une case par rapport à λ, μ. On répète jusqu'à ce que $\mu = 0$. On a maintenant une remplissage de forme d'une partition de taille $|\lambda| - |\mu|$. On l'appelle la rectification du remplissage de départ.

Remarquons qu'il y a plusieurs choix possibles. Néanmoins, on a le théorème suivant :

Théorème 1.1.1. *Si on commence avec un remplissage de λ/μ, le remplissage de forme d'une partition qui est produit par le jeu de taquin est bien défini.*

La forme qui résulte dépend du remplissage.

Théorème 1.1.2. *Si on considère tous les remplissages standards de λ/μ, et on les rectifie, on constate que, pour chaque partition ν, le nombre de fois qu'un remplissage de ν apparaît parmi les rectifications, ne dépend pas du remplissage de ν choisi. (Mais il dépend de ν.)*

Ceci permet de définir $c^{\lambda}_{\mu\nu}$ comme étant ce nombre. Ils s'appellent les coéfficients de Littlewood–Richardson.

1.1.1. *Constantes de structure.* Si on a une base (k-linéaire) $\mathcal{B}$ d'une algèbre A sur un corps k, pour $v, w \in \mathcal{B}$, je peux multiplier $v \cdot w$, et puis le développer de nouveau dans la base :

$$v \cdot w = \sum_{u \in B} c^u_{v,w} u$$

Les *constantes de structure* de A par rapport à $\mathcal{B}$ sont ces $c^u_{v,w}$. Si on ne sait absolument rien sur l'algèbre, n'importe quels constantes de structure pourraient apparaître, mais si l'algèbre est (par exemple) associative, ça donne des conditions non triviales sur les constantes de structure.

Il s'avère que les coefficients de Littlewood–Richardson donnent les constantes de structure pour certaines algèbres intéressantes : les fonctions symétriques, et les anneaux de cohomologie des variétés grassmanniennes. On pourra parler des fonctions symétiques si cela vous intéresse (et si vous n'avez pas déjà trop entendu parler). Théoriquement, la cohomologie provient de la topologie algébrique, et donc on pourrait se dire qu'il n'est pas à sa place dans un cours de combinatoire, mais c'est vraiment étonnant à quel point on peut l'étudier sans comprendre quoi que ce soit de la topologie.

1.1.2. *Mots, monoïde plaxique.* Bien que le jeu de taquin est très élégant, on aimerait peut-être une façon plus directe de passer directement entre les remplissages gauches et les remplissages droites. Il s'avère qu'on peut faire cela en regardant les *mots de lecture* des remplissages. Ici commence toute une histoire sur une certaine relation d'équivalence sur les mots (monoïde plaxique, ...).

1.1.3. *Variantes.* Au lieu de considérer des remplissages des partitions, on peut considérer les diagrammes de Ferrers décalés, où la forme est d'une partition où chaque partie est d'une taille différente, et chaque ligne est décalé d'un cran par rapport à la précédente. Les deux théorèmes cités ci-haut s'appliquent dans ce cadre aussi. Et ça donne les constantes de structure pour une sous-algèbres des fonctions symétriques, et aussi une algèbre de cohomologie d'une autre famille de variétés.

En principe, on pourrait considérer des remplissages de n'importe quel poset et faire une version du jeu de taquin. Mais les deux théorèmes ci-hauts ne seraient plus vérifiés. Un cadre dans lequel le premier théorème ci-haut est vérifié est les posets "d-complètes" de Proctor.

On peut aussi changer les règles pour les remplissages. Un remplissage est dit *croissant* s'il est strictement croissant dans les deux sens. Pour un tel remplissage, il n'est pas forcément possible de faire passer un des voisin avant l'autre (s'ils sont égaux) - il faut plutôt se permettre de laisser les deux entrées égales entrer en même temps. Cette théorie a été développé par Alex Yong et moi (et par la suite pas plusieurs autres personnes).

1.2. **Correspondance de Robinson–Schensted–Knuth.** La version *correspondance de Robinson–Schensted* est une bijection entre les éléments du groupe symétrique S_n et les paires de tableaux standards de taille n et de la même forme.

On peut décrire la correspondance RS en termes du jeu de taquin. Pour le premier tableau, on met les entrées de la permutation sur une anti-diagonale (conçue comme forme gauche), et on rectifie. Pour le deuxième, on met la permutation inverse.

Cette façon rapide de la définir ne met bien sûr pas en évidence l'intérêt.

RSK généralise la correspondance RS, et est une correspondance entre les matrices d'entiers non negatifs de taille $n \times n$, et les paires de tableaux semi-standards de la même forme, sur les entiers de 1 à n.

1.3. **Couplages.** La deuxième partie du cours traite de la théorie des graphes (dans un sens large). Un graphe est appelé *biparti* si on peut diviser les sommets en deux parties, tels que chaque arête lie un sommet de chaque partie. Si on a un graphe biparti, avec les deux parties de la même taille, on peut chercher là-dedans un *couplage parfait* (un ensemble d'arêtes tel que chaque sommet est incident à un seul arête). Quand est-ce qu'il sera possible ?

Théorème 1.3.1 (Théorème de mariage de Hall)**.** *Il y a une condition nécessaire évidente pour qu'il existe un couplage parfait. Cette condition est également suffisante.*

Si on parle des mariages, on peut aussi considérer le problème des mariages stables. Supposons que nous avons n femmes et n hommes qui veulent se marier (et que nos mariages comportent une femme et un homme, même s'il d'autres choix peuvent également être intéressants). Supposons que chaque femme a une liste (totalement ordonnée) de préférences des hommes, et vice versa pour les hommes. Une collection de *mariages stables* est une collection de mariages où tout le monde est marié et il n'existe pas une femme et un homme qui seraient plus contents ensemble qu'avec leurs partenaires.

L'algorithme de Gayle–Shapley est une excellente algorithme qui permet (toujours !) de trouver une collection stable.

Il y a des variants. On peut aussi étudier la structure de l'ensemble des collections stables, qui forme un treillis distributif.

1.4. **Flots.** Si on a un graphe orienté, on peut voir les arêtes comme des chemins qui permettent de transporter des biens. Mettons que chaque arête a une capacité qui borne le montant de matériel qu'elle peut transporter. Combien de matériel est-ce qu'on peut transporter d'un sommet v à un autre sommet w ? (À chaque sommet entre v et w, le montant qui arrive au sommet doit être égal au montant qui part.)

La réponse est donnée par l'théorème de Ford–Fulkerson, qui donne également un algorithme pour trouver un flot maximal. Ici aussi, il ya de belles variantes.